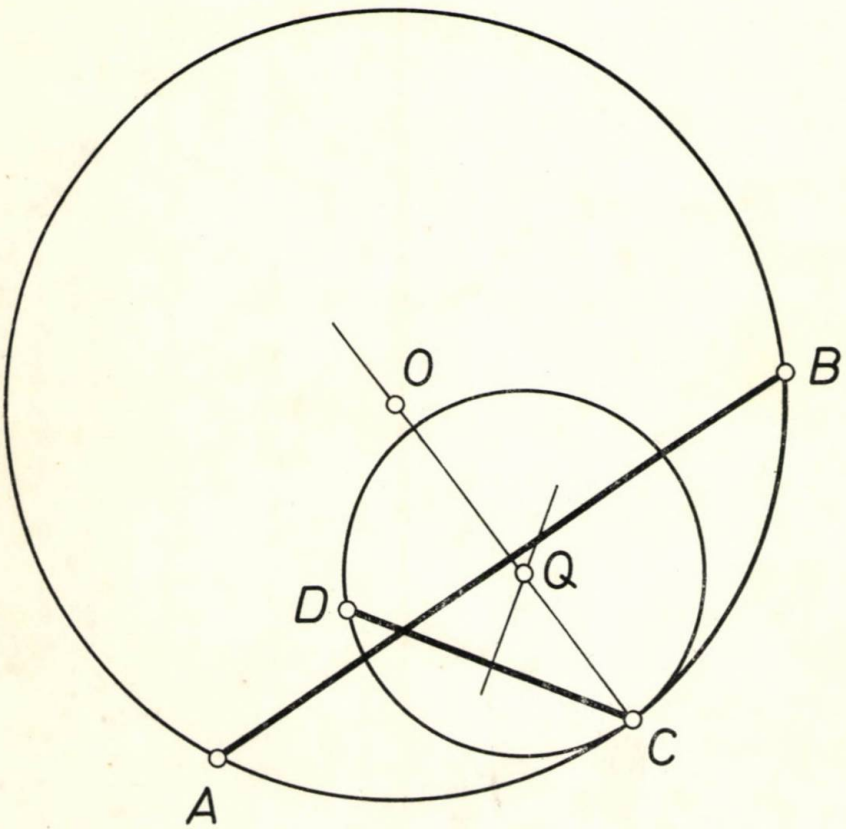
A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1981. február * XXVIII. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PALMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200
81-11 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1
Dr. Vajda István: A skaláris szorzat tanításának lehetőségeiről 5
Katz Sándor: Különleges függvények szerepe a középiskolai matematika tanításában 10
Dr. Kelemen József: Háromszögek racionális oldalakkal és szögfelezőkkel..... 16
Andor Csaba: Lindenmayer-automaták ... 20
FELADATOK 26
Beszámoló a CIEAEM (A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság) 1980. évi találkozójáról III
Beszámoló a IV. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról III
Ismerd meg a MTESZ történetét! IV

СОДЕРЖАНИЕ

Элёд Иштванне: Что издано из программ, учебников и сопровождавших пособий для начальных и средних школ..... 1
Д-р Вайда Иштван: О возможностях преподавания шкалярных продуктов..... 5
Кац Шандор: Роль особенных функций в преподавании математики в средней школе 10
Д-р Келемен Йожеф: Треугольники с рациональными сторонами и биссектрисами 16
Андор Чаба: Автоматы Линденмайера 20
ЗАДАЧИ..... 26
Сообщение о Совещании ЦИЕАЕМ — 1980 г. (МКИУПМ — Международной комиссии по изучению и совершенствованию преподавания математики) III
Сообщение о IV Конгрессе по преподаванию математики III
Об истории МЭТЭС (СОПЕН — Союза Обществ политехнических и естественных Наук) IV

INHALT

Frau Ilona Előd (geb.: *Bakos*): Was sind aus den neuen Mathematik-Lehrplänen der Grund- und Mittelschulen und aus den zugehörigen Dokumenten bisher erschienen? 1
Dr. Vajda, István: Über die Möglichkeiten des Unterrichts des Skalarproduktes.... 5
Katz, Sándor: Die Rolle „besonderer" Funktionen im Mathematikunterricht in den Mittelschulen 10
Dr. Kelemen, József: Dreiecke mit rationalen Seitenlängen und Winkelhalbierenden 16
Andor, Csaba: Lindenmayer-Automaten.. 20
AUFGABEN 26
Bericht über die Zusammenkunft der CIEAEM (Internationalen Kommission für das Studium und Verbesserung des Mathematikunterrichts) in 1980..... III
Bericht über den IV. Internationalen Kongreß des Mathematikunterrichts..... III
Lerne die Geschichte des MTESZ (Verbandes der Technischen und Naturwissenschaftlichen Gesellschaften) kennen!.... IV

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1981. ÉVI XXVIII. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 2/35, 4/119
Andor Csaba: Lindenmayer-automaták 1/20
Bánhegyi László: A legjobbak foglalkoztatása képességeiknek megfelelően és fejlesztésük matematikából az iskolában 2/45
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: Eszperantista matematikusok budapesti találkozója 3/86
Beszámoló a CIEAEM (A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság) 1980. évi találkozójáról 1/III
Beszámoló a IV. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról 1/III
Czeglédy István—Dr. Hajdu Sándor: A nevelés tervezése a matematikaoktatásban 6/161
Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 1/1
Fonódi Gyula: Az általános iskolai matematika tantervi követelményeinek pontosításáról 4/97
Fonódi Gyula: Felmérő feladatsorok matematikából Hajdú-Bihar megyében 5/129
Garádi János: Beszámoló a Középiskolások Számítástechnikai Versenyeiről 5/144
Hajnal Imre—Dr. Pintér Lajos: A fakultatív „B" tanterv III. osztályos könyvéről 3/72
Helyreigazítás 4/III
Hódi Endre: Beszámoló a XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról 6/174
Dr. Horváth Jenő: A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában II. 2/52
Ismerd meg a MTESZ történetét! 1/IV
Kanász László: Tanulói körző kiegészítése írásvetítőn való használathoz 6/182
Dr. Kántor Sándorné: Megjegyzések és szintezési útmutató a középiskolai új tankönyveknek a Geometriai feladatok gyűjteményéből választott feladataihoz 5/132
Dr. Kárteszi Ferenc: A szabályos tizenkétszög egy érdekes tulajdonsága 2/62
Katz Sándor: Különleges függvények szerepe a középiskolai matematika tanításában 1/10
Dr. Kelemen József: Háromszögek racionális oldalakkal és szögfelezőkkel 1/16
Dr. Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (Kísérleti anyag, II. osztály 1. rész.) 4/102
Dr. Laczkovich Miklós—Dr. Simonovits Miklós: Analitikus függvények a középiskolában I. . 2/35
Dr. Laczkovich Miklós—Dr. Simonovits Miklós: Analitikus függvények a középiskolában II. . 3/76
Lasztóczi Gyula: Rajzoljunk a térbe! 5/149
Dr. Máté László: Szakköri feladatok a számsorozatok tanításához 4/113
„Matematikatanárok versenyé"-nek 1980. évi díjazottjai 3/89
Novák Lászlóné: Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1980. évi vetélkedőjének országos fordulójáról 3/65
Pálmai Éva: Tízes számrendszerből kettesbe és kettes számrendszerből tízesbe átalakító eszköz 6/178
Rábai Imre: Kétismeretlenes egyenletrendszerek 4/107
Rozgonyi Tibor—Dr. Varecza Árpád: Bizonyos rekurzív sorozatokról 6/183
Dr. Szepessy Bálint: Jelentés a Tanárképző Főiskolák 1981. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről 5/138
Tájékoztatás az első nemzetközi statisztikatanítási konferenciáról 4/III
Dr. Urbán János: A gimnáziumi fakultatív matematika tantárgy tanterveiről 2/33
Dr. Urbán János: Javaslat a gimnáziumi „A" változatú fakultatív matematika-tanterv III. osztályos Analízis I. témakörének tanításához 5/137
Dr. Vajda István: A skaláris szorzat tanításának lehetőségeiről 1/5
Dr. Vajda István: Néhány javaslat a skaláris szorzatnak feladatmegoldásokban való felhasználására 6/166
Dr. Varecza Árpád: Egy versenyfeladat és a keresési problémák 2/59
FELADATOK 1/26, 2/63, 3/89, 4/120, 5/152, 6/187
KÖNYVISMERTETÉS 5/IV

ELŐD ISTVÁNNÉ
felelős szerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?

Az alábbiakban közöljük a már megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét a legszükségesebb bibliográfiai adatokkal, iskolatípusok szerinti csoportosításban. Minden esetben csak az utolsó kiadást jelöljük meg. Zárójelben feltüntetjük az alkalmazásba vétel évét is.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA

1.1. **Alsó tagozat**

1.1.1. *Ideiglenes tanterv*

Oktatási Minisztérium, Budapest, ISBN 963 7023 42 9. (1974-től.)

Kovács Zoltán: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1422. (1977-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—dr. Varga Tamás: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1422/M. (1977-től.)

Halmos Istvánné—dr. Ill Mártonné—Kovács Zoltán—Tiszai Zoltánné: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanításához I., II. kötet. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 490/I., II. (1977-től.)

1.1.2. *Új tanterv*

Az általános iskolai nevelés és oktatás terve I., II. kötet. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1977. ISBN 963 7801 49 9. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 1. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 102/M. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Göndöcs László—Merő László—Merő Lászlóné—dr. Varga Tamás: Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz. 83 015. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 2. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 202/M. (1979-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Herczeg Jánosné—Merő László—dr. Varga Tamás (szerkesztette: Novák Lászlóné): Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 83 021. (1979-től.)

Kovács Zoltán: Matematika. Általános iskola 3. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 302. (1980-tól.)

Erdész Edéné—dr. Kovács Vendelné: Matematika-munkalapok. Általános iskola 3. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 302/M. (1980-tól.)

1.2. **Felső tagozat**

1.2.1. *Ideiglenes tanterv*

Oktatási Minisztérium, Budapest, 1976. ISBN 963 7023 43 7. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 5. osztálya számára. 6. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1522. (1974-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanulásához. 6. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1522/M. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Feladatgyűjtemény és munkalapok. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1522/K. (1978-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 478. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 6. osztálya számára. 5. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1622. (1975-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanulásához. 5. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1622/M. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 480. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 7. osztálya számára. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1722. (1976-tól.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanulásához. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1722/M. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. R. sz.: 91 486. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 8. osztálya számára I., II. kötet. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1822/I., II. (1977-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanulásához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 1822/M. (1977-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 487. (1977-től.)

1.2.2. *Új tanterv*

Az általános iskolai nevelés és oktatás terve III. kötet. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. ISBN 963 7801 68 5. (1978-tól.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 5. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 502. (1978-tól.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 5. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 502/M. (1978-tól.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Radnainé Szendrei Julianna—Sztrókayné Földvári Vera: Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 83 001. (1978-tól.)

Dr. Varga Tamás—Radnainé Szendrei Julianna: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 83 004. (1979-től.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Sztrókayné Földvári Vera: Matema-

tika általános iskola 6. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 602. (1979-től.)

Csahóczi Erzsébet— Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 6. osztály. 1. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 602/M. (1979-től.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Radnainé Szendrei Julianna—Sztrókayné Földvári Vera: Kézikönyv a matematika 6. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 83 020. (1980-tól.)

Kovács Csongorné—Szeredi Éva—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 7. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 702. (1980-tól.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Novák Lászlóné—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 7. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 702/M. (1980-tól.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.1. Szakmunkásképző iskola

A szakmunkásképző iskolák nevelési és oktatási terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 061. (1977-től.)

Koller Lászlóné: Módszertani útmutató matematikából a szakmunkásképző iskolák számára. Pedagógus továbbképzés könyvtára. 1. kiadás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1977. (1977-től.)

Bige Istvánné—Cser Andor—Szegedi Miklós: Matematika I., I. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 502. (1977-től.)

Bige Istvánné: Matematika munkalapok, I. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 12 502/M. (1977-től.)

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz I. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 001/I. (1977-től.)

Bige Istvánné—Csánk István—Szabó Sándorné: Matematika II., II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 602. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Matematika munkalapok, II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 602/M. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz II. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/II. (1978-tól.)

Bedő László—Bige Istvánné—Szabó Sándorné: Matematika III., II—III. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 702. (1978-tól).

Szabó Sándorné: Matematika munkalapok, II—III. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 702/M. (1978-tól.)

Szabó Sándorné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz III. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/III. (1978-tól.)

2.2. Szakközépiskola

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—5—4—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—33. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—4—3—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—34. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 4—3—3—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—35. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—5—6—6 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—36. (1978-tól.)

Lasztóczi Gyula: A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika I., I—II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 021/I. (1978-tól.)

Lasztóczi Gyula: A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika II., III—IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 021/II. (1980-tól.)

Czapáry Endre: Matematika I. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 102. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Matematika-feladatlapok I. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 102/F. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Matematika II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 202. (1979-től.)

Czapáry Endre: Matematika-feladatlapok II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 202/F. (1979-től.)

Gádor Endréné: Matematika II. osztály (C variáns), 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 212. (1980-tól.)

Bakó Zsuzsa: Matematika III. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 14 302. (1980-tól.)

2.3. Gimnázium

A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 064. (1979-től.)

Ábrázoló geometria. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4077. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Matematika, A változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4052. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Matematika, B változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4051. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Dr. Urbán János: A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 009. (1979-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika I. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 13 102. (1979-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika-feladatlapok I. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 13 102/F. (1979-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv I. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 13 125/MT. (1979-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Tankönyvi útmutató az I. osztályos Matematika munkatankönyvhöz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 060. (1979-től.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 13 202. (1980-tól.)

Dr. Korányi Erzsébet: Matematika-feladatlapok II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 13 202/F. (1980-tól.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv II. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 13 225/MT. (1980-tól.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Tankönyvi útmutató a II. osztályos Matematika munkatankönyvhöz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980. R. sz.: 84 070. (1980-tól.)

A matematikatanítás módszere

DR. VAJDA ISTVÁN
középiskolai szakfelügyelő
Zalaegerszeg

A skaláris szorzat tanításának lehetőségeiről

„A gimnáziumi nevelés és oktatás terve" a III. osztályos matematikaanyagban törzsanyagként szerepelteti a vektorok skaláris szorzatát. Végre mindenki számára kötelező tananyag lett, szerves következményeként annak a folyamatnak, amely a vektorok középiskolai tanításával az 1966-os reformmal elkezdődött. A skaláris szorzat ismeretében ugyanis lényegesen kibővül a vektorok matematikában való alkalmazhatóságának köre. Igen sok geometriai, sőt algebrai probléma megoldását megkönnyítheti. Leegyszerűsödik a középiskolai koordináta-geometria tárgyalása is. Más tárgyak, elsősorban a fizika igényei is mellette szólnak.

Két vektor skaláris szorzatát a szakkönyvek többsége a következő módon értelmezi:

(*a*) A vektorok abszolútértékének és hajlásszögének segítségével az

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos (\mathbf{a}; \mathbf{b})$$

képlettel.

(*b*) A vektorkoordináták ismeretében az

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

formulával, ahol $(a_1; a_2; a_3)$ az **a** és $(b_1; b_2; b_3)$ a **b** vektor koordinátái.

(*c*) Egy harmadik módszer — mellyel elsősorban külföldi szakkönyvekben találkozhatunk — a skaláris szorzat alaptulajdonságait axiómaként rögzítve, azt a vektor-skalár függvényt tekinti skaláris szorzatnak, amely eleget tesz a megszabott négy tulajdonságnak (axiómának).

Bár a (*c*) (axiomatikus) módszer középiskolai alkalmazása nem megoldhatatlan, mégis elég sok nehézségbe ütközik. Elsősorban azért, mert nem könnyű hozzá megfelelő fogalom-előkészítő problémát találni. Ugyanis egy vektorpárból származtatott szám, a skaláris szorzat fogalmát sugalmazó probléma akkor jó motiválás céljára, ha abból a skaláris szorzatot jelentő szám tulajdonságai természetes módon kínálkoznak. Vagyis az $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$; $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})$; ... stb. műveleti szabályok értelme a fogalomkeltő probléma tisztázásának folytán szinte magától adódik. A műveleti szabályok formalizálása ezután következik majd. Így persze az $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ vagy $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos (\mathbf{a}; \mathbf{b})$ nem mint definíció, hanem mint tétel szerepel.

Nyilvánvaló, hogy a fordított út, azaz (*a*) és (*b*) alatt említett értelmezési lehetőség alkalmazható sikeresen középiskolában. A szakirodalom túlnyomó többsége a trigonometrikus definíciót választja ([4], [6], [12], [13]). A módszertani jellegű szakkönyvek szinte kizárólag a mechanikai munka kiszámításával kapcsolatos motiváló feladatból indulnak ki. Ez a felfogás egyrészt azért vitatható, mert tulajdonképpen két különböző vektortér (egy merev testre ható mechanikai erők, illetve elmozdulások vektorterei), egy-egy elemének skaláris szorzatát értelmezi, másrészt erősen támaszkodik a szög és szögfüggvények fogalmára. Az $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos (\mathbf{a}; \mathbf{b})$ definícióval való tárgyalás módszertani szempontból azért is kifogásolható, mert a skaláris szorzat

bizonyos tulajdonságainak precíz igazolását nehézkessé és hosszadalmassá teszi. Különösen a disztributivitás bizonyítása körülményes, viszont mindenképpen szükség van rá, hiszen többnyire erre támaszkodunk a skaláris szorzat alkalmazásainál (pl. a cosinustétel bizonyításában).

Ezért most a (*b*) lehetőséggel élve, a vektorkoordinátákkal értelmezett definícióból kiindulva készítünk egy olyan felépítést, amelyet a gimnáziumok III. osztályaiban taníthatunk.

Legfőbb szempontunk az volt, hogy ezt a definíciót a geometriai vektorokon (egymással ekvivalens irányított szakaszok osztályai) kívül más vektorterekben is alkalmazhatjuk. Mivel bármely véges dimenziójú vektortér — alkalmas n esetén — izomorf módon leképezhető a rendezett szám-n-esek vektorterére, minden olyan vektortérben, ahol egyáltalán értelme van a skaláris szorzatnak, ezt a műveletet komponensenkénti szorzással egyszerűen értelmezhetjük. E definíció alapján igen könnyen igazolhatjuk a skaláris szorzat tulajdonságait is.

Megállapításaink persze szakmai jellegűek és elsősorban a matematika mint tudomány szempontjából igazolhatják a skaláris szorzat ilyen bevezetését. A módszertan szemszögéből sokkal döntőbb az, hogy a tanulóknak melyik út járhatóbb. Melyiket tudják könnyebben asszimilálni meglevő szkémáikba. Ha ebből kiindulva vizsgáljuk a bevezetési lehetőségeket, ugyancsak a második definíció mellett kell lándzsát törnünk, hiszen az új II. osztályos tankönyvben ([9] II. 196—220. oldal) a vektorokkal zömmel koordinátáik, komponenseik segítségével dolgoztak. Ezért a tanulókban az a kép alakulhatott ki, hogy a vektorokat célszerű koordinátáikkal megadni, s ilyen alakban számolni velük.

Ezzel egyébként az új nevelési terv olyan fontos célkitűzésének megvalósítását is szolgáljuk, hogy a matematikáról mint egységes egészről alakuljon ki kép a tanulókban. A vektorkoordináták bevezetésével már szoros kapcsolatba került a geometria és az algebra, s ennek egyenes folytatásaként a skaláris szorzatot is célszerű koordinátás alakban értelmeznünk.

A II. osztályos előzmények mellett talán még nagyobb súllyal esik latba a III. osztályos új témakörök közül a „Koordináta-geometria" és a „B" variánsú fakultatív tantervben a „Lineáris algebra elemei". A skaláris szorzat koordinátás tárgyalásával mindkettőt alaposan előkészíthetjük, sőt a „B" tanterv esetében a lineáris algebra egy részét már a skaláris szorzat tárgyalásánál elvégezhetjük. Tehát a fakultatív „B" változatú csoportoknál különösen hasznos és időnyerő ennek a módszernek a választása.

Persze a (*b*) definícióval való indulás is felvet néhány problémát, amelyek viszont a trigonometrikus tárgyalás során oldhatók meg könnyebben: Kevésbé látszik a skaláris szorzat geometriai jelentése, külön kell igazolni a definíció függetlenségét a koordináta-rendszer megválasztásától, és körülményesebb a trigonometrikus alakra való áttérés.

Az $\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ definícióból kiinduló felépítés vázlata és az előbb említett gondok egy feloldási lehetősége [14]-ben a 40., 41. oldalon található.

Ebben a cikkben egy másik lehetséges felépítésre hívjuk fel a figyelmet. Előnye talán az, hogy a fenti három problémára egyetlen tétel bebizonyításával egyszerre kapunk választ. Az új gimnáziumi tankönyvhöz [9] kapcsolódva először síkbeli (két komponensű) vektorokkal dolgozunk. Később a térbeli esettel is foglalkozunk majd röviden.

Kiindulásunk alapja az, hogy a tanulók II. osztályban már megismerkednek egy vektor és 90°-os elforgatottja koordinátái közti kapcsolattal ([9] II. 208—210. oldal). Ebből könnyen eljuthatunk oda, hogy miként származtathatók egy vektor koordinátáiból az összes, rá merőleges vektor koordinátái: Ugyanis, ha pl. az $\mathbf{a}(a_1; a_2)\neq\mathbf{0}$ vektor $+90°$-os elforgatottja $\mathbf{b}$ vektor, akkor $\mathbf{b}$ koordi-

nátái $(-a_2; a_1)$, és mivel minden, az **a** vektorra merőleges vektor $\lambda\mathbf{b}$ alakú, az ilyen vektorok koordinátái $(-\lambda a_2; \lambda a_1)$ lesznek, ahol λ tetszőleges valós szám. Ennek ismeretében nem nehéz bebizonyítani az

„$\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ akkor és csak akkor merőlegesek, ha

$$a_1b_1+a_2b_2 = 0"$$

összefüggést, mely nyilván $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ esetén is igaz. A bizonyítás egyben jó alkalom középiskolában egy tétel és megfordítottja közti kapcsolat, illetve különbség kimutatására, valamint az egyik bizonyításánál a másik már igazolt rész felhasználására.

A bizonyítás, majd néhány merőlegességgel kapcsolatos feladat megoldása után értelmezhetjük egyszerű elnevezésként a skaláris szorzatot, motivációként felhasználva az előző tételben szereplő $a_1b_1+a_2b_2$ formulát:

„Két tetszőleges $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1b_1+a_2b_2."$$

Ezután néhány konkrét példa megoldása kapcsán az alaptulajdonságok összegyűjtése, majd bizonyítása következhet:

Ha **a**, **b** és **c** tetszőleges vektorok és $\lambda \in \mathbf{R}$, akkor:

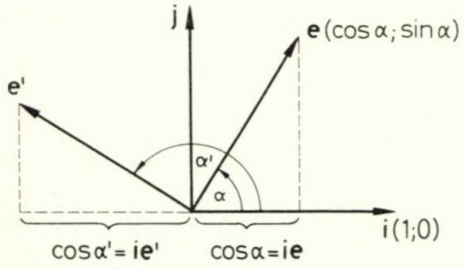
1. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$;
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc}$;
3. $\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}$;
4. $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2 = a^2 \geqq 0$.

Az összefüggések bizonyítására itt nem térünk ki, hiszen nem jelentenek egyebet (1.-nél, 2.-nél és 3.-nál), mint a fenti egyenletek jobb és bal oldalának koordináták segítségével való felírását, majd összehasonlítását, felhasználva a valós számok ismert műveleti tulajdonságait.

Az értelmezés és az alaptulajdonságok megbeszélése során feltétlenül rá kell mutatnunk a vektorok skaláris szorzata és a valós számok szorzása közti lényeges különbségre. Erre ismét jól felhasználható a motiváló feladat, tudniillik két vektor skaláris szorzata nemcsak akkor nulla, ha valamelyik vektor nullvektor, másrészt nem is vektor, hanem egy szám, skalár! Azt is célszerű megvizsgálni, hogy miért nincs értelme három vektort skalárisan összeszorozni.

Mivel a skaláris szorzat geometriai jelentése és koordináta-rendszertől való függetlensége az alkalmazhatóság szempontjából igen fontos, most ennek kimutatására érdemes a figyelmet fordítani. Kiindulásként pl. megvizsgáltathatjuk a tanulókkal, hogy a két vektor változtatásával hogyan módosul skaláris szorzatuk.

Az, hogy $\mathbf{ab} \neq 0$ esetben két vektor skaláris szorzata az egyik tényező abszolútértékével egyenesen arányos, a 3. alaptulajdonságból azonnal következik, akár annak tárgyalásakor fel lehet rá hívni a figyelmet. Ezért elegendő, ha a továbbiakban a vektorok abszolútértékétől eltekintve, tehát pl. egységvektorok esetén vizsgáljuk a skaláris szorzatnak a két vektor hajlásszögétől való függését. Pl. az **i** vektor origó körüli, különböző α szögű **e** elforgatottja és **i** skaláris szorzata, valamint α közti kapcsolat néhány konkrét esetéből célszerű kiindulni. Ebből azonnal adódik az $\mathbf{ie} = \cos\alpha$ összefüggés, és megfigyelhetők, felfedezhetők az előjelviszonyok is. Ugyanis **e** vektor koordinátái $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, **i** vektoré pedig $(1; 0)$. Ezért $\mathbf{ie} = 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$. (A tanulók II. osztályból már ismerik a szögfüggvényeket és a vektorok trigonometrikus alakját.) Leolvasható az ábráról a skaláris szorzat geometriai jelen-



tése is. (**ei** abszolútértéke az **e** vektor **i** egyenesére eső merőleges vetületének hossza.)

A feladat elemzése után akár azonnal felvethető az általánosítás. Azaz, igaz-e a következő tétel:

„Ha **a** tetszőleges vektor és **e** egy egységvektor ($|\mathbf{e}|=1$), akkor az **ae** szorzat abszolútértéke az **a** vektor **e** egyenesére eső merőleges vetületének hossza, előjele pedig:

$$0° \leqq \alpha < 90°$$

esetén pozitív,

$$90° < \alpha \leqq 180°$$

esetben negatív, ahol α az **a** és **e** vektor hajlásszöge. $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ vagy $\alpha=90°$ esetben $\mathbf{ae}=0$."

Ha ezt bebizonyítjuk, egycsapásra választ kapunk a nyitott kérdésekre! Mivel a bizonyításban (lásd alább!) sehol sem használjuk ki azt, hogy a vektorok milyen ortonormált bázisra vonatkoztatott koordinátáival dolgozunk, igazoltuk a koordináta-rendszertől való függetlenséget, másrészt a skaláris szorzat általánosan is bizonyított geometriai jelentése alapján az $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a};\mathbf{b})$ trigonometrikus alak is automatikusan következik. Nézzük a bizonyítást:

Egyszerűség kedvéért az **a** és **e** vektorokat közös kezdőpontba rajzoltuk. Az ábra jelöléseit felhasználva: Tekintsük az **e** egységvektor (**ea**)-szorosát! Így egy olyan $\overrightarrow{OT}=(\mathbf{ea})\mathbf{e}$ vektort kapunk, melynek abszolútértéke (**ea**) és iránya $\mathbf{ea}>0$ esetén megegyezik, $\mathbf{ea}<0$ esetben viszont ellentétes lesz **e** vektorral. Ezért elegendő bebizonyítanunk azt, hogy az $\overrightarrow{OT}$ és $\overrightarrow{TA}=\mathbf{a}-\overrightarrow{OT}$ vektorok merőlegesek (beleértve azt az esetet is, amikor egyikük **0**), azaz skaláris szorzatuk 0. Ezt fogjuk belátni.

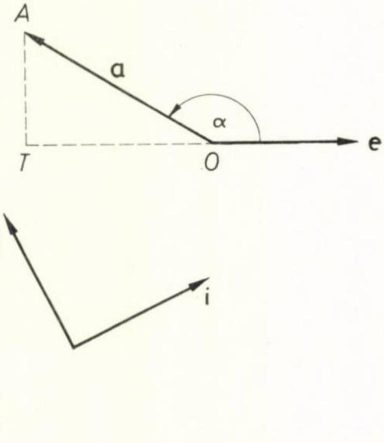
A skaláris szorzat tulajdonságait felhasználva:

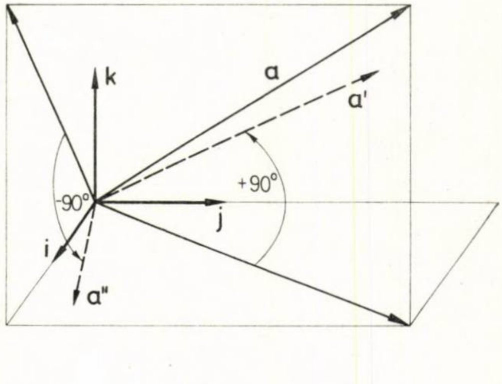
$$\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{OT}(\mathbf{a}-\overrightarrow{OT})=$$
$$=(\mathbf{ea})\,\mathbf{e}[\mathbf{a}-(\mathbf{ea})\mathbf{e}]=$$
$$=(\mathbf{ea})(\mathbf{ea})-(\mathbf{ea})\mathbf{e}(\mathbf{ea})\mathbf{e}=$$
$$=(\mathbf{ea})^2-(\mathbf{ea})^2\mathbf{e}^2=0,$$

mert $\mathbf{e}^2=1$. Tehát $\overrightarrow{OT}=(\mathbf{ea})\mathbf{e}$ és $\overrightarrow{TA}$ merőleges vektorok, s mindebből következnek a fenti állítások, köztük a trigonometrikus alak is.

Most már két vektor skaláris szorzatát kétféleképpen is felírhatjuk és az alkalmazásoknál mindig azzal dolgozhatunk, amelyikkel kényelmesebb.

A fenti felépítést síkbeli vektorokra végeztük el. Térben mindez ugyanígy valósítható meg, de a merőlegesség feltételének [$\mathbf{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2; b_3)$ akkor és csak akkor merőlegesek, ha a_1b_1+ $+a_2b_2+a_3b_3=0$] bizonyítása jóval bonyolultabb, mint síkban. A bizonyítás vázlata: A gondolatmenet itt is ugyanaz, mint síkbeli vektoroknál. Az **i**, **j**, **k** ortonormált bázissal meghatározott tetsző-





leges $\mathbf{a}(a_1; a_2; a_3) \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges összes vektort próbáljuk felírni **a** koordinátái segítségével. Bebizonyítható, hogy ezek pl. mind $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}' + \mu\mathbf{a}''$ alakúak, ahol $\mathbf{a}'$ az **a** vektor (**i**; **j**) síkra való merőleges vetületi vektorának **k** vektor körüli $+90°$-os, $\mathbf{a}''$ vektor pedig **a** vektor (**i**; **k**) síkra való merőleges vetületi vektorának **j** vektor körüli $-90°$-os elforgatottja és λ, μ tetszőleges valós számok. Ezért az **a** vektor ramerőleges összes vektor koordinátái $(-\lambda a_2 + \mu a_3; \lambda a_1; -\mu a_1)$ alakúak. Ebből már nem nehéz levezetni a merőlegesség $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ feltételét.

Normál (heti 3 órás) osztályokban nyilván nincs idő ennek kimutatására, „B" variánsú fakultatív csoportokban viszont, ha máshol nem, szakkörön igen. Ezért normál osztályokban csak azt érdemes bizonyítás nélkül megjegyezni, hogy ez a tétel térben is igaz. Ennek alapján mindjárt az $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ formulával célszerű a skaláris szorzatot definiálni. A továbbiakban minden lényeges tételt, az alaptulajdonságokat is, térbeli vektorokra érdemes igazolni. Így kibővül majd a skaláris szorzat alkalmazhatóságának köre. Pl. nagy hasznát vehetjük térgeometriai számításos (pl. térelemek hajlásszöge), illetve merőlegességgel kapcsolatos bizonyításos feladatok megoldásánál.

S még egy megjegyzés a vektorokkal és skaláris szorzatukkal kapcsolatban. Sokan attól félnek, hogy „elalgebrásítják" a geometriát, és ezért nem fejleszti eléggé a tanulók térszemléletét, geometriai látásmódját. Ez valóban igaz akkor, ha minden geometriai problémát erőltetve vektorokkal akarunk megoldani, még akkor is, ha esetleg hagyományos úton egyszerűbb lenne. Másrészt viszont a vektorok alkalmasak algebrai problémák „geometrizálására" is! Itt a lineáris algebra mellett elsősorban bizonyos egyenlőtlenségek vektorok segítségével történő igazolására gondolhatunk. Ugyanis

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 =$$

$$= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \leqq |\mathbf{ab}| \leqq |\mathbf{a}||\mathbf{b}| =$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

miatt, melyet szinte le sem kell vezetni, az

$$(*) \qquad \mathbf{ab} \leqq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

egyenlőtlenség (ahol egyenlőség csak akkor áll fenn, ha **a** és **b** vektorok egyirányúak) sok algebrai problémának az alapja. Ezáltal algebrai feladatokhoz geometriai modellek konstruálhatók, amelyekkel viszont jól fejleszthetjük tanulóink térszemléletét.

Ennek alátámasztására nézzünk egy feladatot:

„Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll az

$$(1) \quad a + 2b + 3c \geqq 14$$

egyenlőtlenség, akkor érvényes az

$$(2) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geqq 14$$

egyenlőtlenség is! Mikor teljesül (2)-ben pontos egyenlőség?"

(OKTV 1979. I. forduló 5. feladata)

A megoldás (Bacsi Zsuzsanna tanítványom dolgozata alapján):

Tekintsük a következő vektorokat:

$$\mathbf{u}(a; b; c) \quad \text{és} \quad \mathbf{v}(1; 2; 3).$$

Ekkor (1) és $(*)$ alapján:

$$14 \leqq a + 2b + 3c = \mathbf{uv} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{14}.$$

Ebből egyszerű átalakítással adódik az $a^2 + b^2 + c^2 \geqq 14$ egyenlőtlenség. Egyenlőség akkor áll fenn, ha mindkét helyen egyszerre teljesül az egyenlőség. Tehát:

$$\mathbf{uv} = a + 2b + 3c = 14$$

és

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{14} = |\mathbf{v}|.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, azaz $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$.

Irodalom

[1] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve.* Tankönyvkiadó, Bp., 1978.
[2] *A. Calame:* Mathématiques modernes II. (Svájc).
[3] *R. A. Carmen:* Programozott vektoralgebra. Tankönyvkiadó, Bp., 1969.
[4] *Feldmann László:* Vektoralgebra. Tankönyvkiadó, Bp., 1969.
[5] *Fried Ervin:* Absztrakt algebra elemi úton. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1975.
[6] *Hajós György:* Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Bp., 1960.
[7] *Kárteszi Ferenc:* A geometriatanítás korszerűsítéséről. Tankönyvkiadó, Bp., 1972.
[8] *Kemeny—Snell—Thompson:* A modern matematika alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1971.
[9] *Dr. Korányi Erzsébet:* Gimnáziumi matematika tankönyv I. és II. osztály. Tankönyvkiadó, Bp., 1979, 1980.
[10] *Kővári Károly:* A vektorok felhasználása a kúpszeletek tanításában. Élő matematika I. Tankönyvkiadó, Bp., 1975.
[11] *Lukács Ottó:* Koordináta-geometria vektorokkal síkban és térben. Tankönyvkiadó, Bp., 1974.
[12] *Mathematik 12.* NDK Oberschule tankönyv. Berlin, 1971.
[13] *Pogáts Ferenc:* Vektorgeometria. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1970.
[14] *Dr. Urbán János:* Matematika tantervi útmutató, gimnázium. Tankönyvkiadó, Bp., 1979.

KATZ SÁNDOR
gimnáziumi tanár
Bonyhád

Különleges függvények szerepe a középiskolai matematika tanításában

I. A „különleges függvény" definícióját hiába keresnénk a matematikai lexikonokban. Azokat a függvényeket tekintjük különlegeseknek, amelyek olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, olyan tulajdonságúra konstruáljuk őket, amelyekkel a gyakorlatban sűrűn alkalmazott függvények nem rendelkeznek. A különleges függvényeket tételek bizonyításához konstruáljuk, függvénytani fogalmak, tételek jobb megértéséhez, tisztázásához szükségesek. Például a XIX. század elején Ampère és több neves matematikus azon fáradozott, hogy igazolja, minden folytonos függvény, esetleg néhány kivételes ponttól eltekintve, differenciálható. Ezeknek a próbálkozásoknak Weierstrass vetett véget, amikor 1872-ben megjelent cikkében példát közölt egy olyan folytonos függvényre, amely sehol sem differenciálható. Klasszikus példája ez a különleges függvényeknek. [1] 88. oldalán és [2] 162. oldalán is találunk mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvényre példát. A különböző valós függvénytan könyvekben számos, a fentiekhez hasonló különleges függvénnyel találkozhatunk. Eleinte ugyan a matematikusok nem fogadták egyöntetű lelkesedéssel a különleges függvényeket. Henri Poincaré például a következőt írta: „Régebben, ha egy új függvényt felfedeztek, ezt valami gyakorlati célból tették; ma kimondottan azért találják fel ezeket, hogy atyáink következtetéseire rácáfoljanak, s soha nem is fogják ezeket másra használni." [1].

Pedig a különleges függvényeknek, adott tulajdonságú függvények konstruálásának igen nagy szerepe van a függvénytanban. A középiskolás tankönyvek egy-egy adott tulajdonságú függvényre példát lehetőleg a már korábban megismert függvények közül választanak. Pl.: folytonos, de nem differenciálható az $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $x\mapsto|x|$ függvény az $x=0$ helyen; zérus a deriváltja, de nincs szélsőértéke az $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $x\mapsto x^3$ függvénynek az $x=0$ helyen. Függvénykonstruálási feladatokat azonban sem a tankönyvben, sem a feladatgyűjteményben nem találnak a tanulók, így nem is csoda, ha a fenti példákon túl az adott tulajdonságokra nem is igen tudnak újabb példát adni. Pedig a fogalmak, tételek jobb megértéséhez, alkalmazni tudásához szükséges,

hogy egyszerűbb példákat a tanulók maguk is tudjanak konstruálni. Sokat segít az, ha a tanár sok érdekes, különleges tulajdonságú függvényt mutat be a tanulóknak, olyant is, amelynek megkonstruálását a tanulóktól nem lehet elvárni. A tanár által bemutatott példák és az ezekben található ötletek segítségével a tanulók által konstruált különleges függvények kiválóan fejlesztik a függvényszemléletet, segítenek a tételek, fogalmak és azok közötti kapcsolatok teljesebb megértésében, fejlesztik a tanulók absztraháló, lényeglátó és kombinációs képességét.

A továbbiakban két függvénycsoportot mutatok be, amelyek tagjai sok érdekes, különleges tulajdonsággal rendelkeznek, és segítséget nyújthatnak különböző függvénykonstruálási feladatokhoz.

II. *Dirichlet-féle függvények*

Az irracionális számok megismerése tizedes tört alak segítségével már első osztályban is történhet. Ezután célszerű megvizsgálni az ún. *Dirichlet*-féle függvényt:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x \mapsto 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ennek az egyszerű függvénynek már első osztályban sok érdekes tulajdonságát megmutathatjuk. A függvény mindenütt értelmezett, de egyetlen intervallumon sem monoton. Bármely racionális helyen maximuma, bármely irracionális helyen minimuma van. Bár a függvény csak két értéket vesz fel, grafikonját mégsem tudjuk egyetlen intervallumon sem megrajzolni. Harmadik osztályban is jó példa lesz ez a függvény, hiszen, bár mindenütt értelmezett, határértéke egyetlen pontban sem létezik, ezért nyilván egyetlen pontban sem folytonos, bármely pontban másodfajú szakadása van.

Ha a *Dirichlet*-féle függvényhez hasonlóan racionális és irracionális helyeken különbözőképpen definiáljuk a hozzárendelést, sok érdekes függvényt adhatunk meg.

Az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto x^n, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x \mapsto -x^n, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N})$$

függvények páratlan n esetén kölcsönösen egyértelműek, de egyetlen intervallumon sem lesznek monoton növekvők vagy csökkenők. Szélsőértékük sincs egyetlen pontban sem. $n=1$ esetén az origóban, és csak ott folytonos a függvény, $n=2, 3, 4, \ldots$ esetén az origóban és csak ott folytonosak és differenciálhatók is. A fenti tulajdonságok könnyen igazolhatók. Érdemes néhány szót szólni a fenti függvények ábrázolásáról. Pontosan ábrázolni egyik grafikonját sem tudjuk, de tudunk olyan görbéket rajzolni, amelyek tartalmazzák a grafikon pontjait, csak a görbéknek nem minden pontja fog a grafikonhoz tartozni. A következő néhány függvény esetében még ilyen engedmény árán sem tudjuk megrajzolni a grafikont.

Az ún. *Riemann-féle* függvény

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x \text{ racionális és } x = \dfrac{p}{q},\ (p, q) = 1,\ q > 0; \\ x \mapsto 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

érdekes tulajdonsága, hogy minden irracionális helyen folytonos, minden racionális helyen pedig megszüntethető szakadása van.

Ennek igazolására elég belátni, hogy a függvény határértéke bármely x_0 pontban 0.

Ha egy tetszőleges valós x_0 ponthoz irracionális számsorozattal közelítünk, nyilvánvaló, hogy a függvényértékek nullához tartanak.

Ahhoz, hogy ezt racionális számokból álló sorozatra is igazoljuk, először a következőt mutatjuk meg:

Bármely véges $(a; b)$ intervallum, és bármely N természetes szám esetén az $(a; b)$ intervallumban csak véges sok, N-nél kisebb nevezőjű racionális szám van.

Ehhez elég belátni, hogy az $1, 2, \ldots, N-1$ nevezőjű törtek mindegyikéből csak véges sok tartozhat $(a; b)$ intervallumba. Ez pedig igaz, mert tetszőleges $q>0$ nevező esetén a $\frac{p}{q}$ racionális szám csak akkor van $(a; b)$ intervallumban, ha $aq<p<bq$. Ilyen tulajdonságú p egész szám pedig csak véges sok lehet.

Legyen x_0 tetszőleges valós szám, $x_n=\frac{p_n}{q_n}$, $x_n \neq x_0$ pedig x_0-hoz konvergáló, racionális számokból álló sorozat; ε legyen tetszőlegesen kicsi pozitív szám, és N legyen $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nem kisebb egész szám! Ha x_n tart x_0-hoz, akkor x_0 tetszőleges környezetéből az x_n sorozatnak csak véges sok tagja maradhat kívül.

Az előző tétel szerint x_0 tetszőleges véges környezetében csak véges sok N-nél kisebb nevezőjű tört szerepelhet. Azaz majdnem minden n-re $q_n>N \geqq \frac{1}{\varepsilon}$, vagyis $\frac{1}{q_n}<\varepsilon$. Tehát tetszőleges pozitív ε esetén az $f(x_n)=\frac{1}{q_n}$ sorozatnak csak véges sok, ε-nál nem kisebb tagja lesz. Tehát az $f(x)$ függvény határértéke bármely x_0 pontban nulla.

Az előzőhöz hasonlóan konstruálható az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto q, & \text{ha } x \text{ racionális és } x=\frac{p}{q},\ (p, q)=1,\ q>0; \\ x \mapsto 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ennek a függvénynek az az érdekes tulajdonsága, hogy egyetlen pontban sem lokálisan korlátos. (Egy f függvény egy x_0 pontban lokálisan korlátos, ha x_0-nak van olyan környezete, amelyben f korlátos.) Ezt a tulajdonságot az előző bizonyítás alapján könnyen igazolhatjuk. Sőt elegendő azt belátni, hogy tetszőleges valós x_0-hoz konvergáló $x_n=\frac{p_n}{q_n}$ racionális számsorozatban, x_0 bármely környezetében tetszőleges M számnál nagyobb nevezők is előfordulnak.

Ismert az a tétel, hogy zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit. Az alábbi korlátos, de nem folytonos függvény egyetlen intervallumon sem veszi fel maximumát.

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto \frac{q-1}{q}, & \text{ha } x \text{ racionális, és } x=\frac{p}{q},\ (p, q)=1,\ q>0; \\ x \mapsto 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Az előző példákban láttatok szerint ennek a függvénynek felső határa bármely intervallumon 1, de ezt az értéket a függvény egyetlen pontban sem veszi fel.

Az alábbi, Sierpinski által konstruált függvény megadási módja kissé eltér ugyan a fenti függvényekétől, de rendkívül érdekes tulajdonsága miatt érdemes megvizsgálni

ezt a függvényt:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto b+a\sqrt{2}, & \text{ha} \quad x = a+b\sqrt{2},\ a \text{ és } b \text{ racionális,} \\ x \mapsto 0, & \text{ha} \quad x \neq a+b\sqrt{2}. \end{cases}$$

E függvény grafikonjának pontjai a síkban mindenütt sűrűn helyezkednek el, azaz a sík bármely $P(x; y)$ pontjának bármely környezetében a függvény grafikonjának végtelen sok pontja van.

Először azt kell belátnunk, hogy a fenti hozzárendelés egyértékű, azaz valóban függvény. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy ha egy x valós szám felírható $a+b\sqrt{2}$ alakban (a és b racionális), akkor ez csak egyféleképpen lehetséges. Ennek belátását az olvasóra bízzuk. Ha ez teljesül, akkor az adott x értékhez valóban csak egyetlen $b+a\sqrt{2}$ függvényérték tartozik.

Most azt mutatjuk meg, hogy a sík tetszőleges $P(x; y)$ pontjához megadhatók olyan a_n és b_n racionális számsorozatok, hogy

$$\lim (a_n+b_n\sqrt{2}) = x \quad \text{és} \quad \lim (b_n+a_n\sqrt{2}) = y.$$

Ha vannak ilyen sorozatok, akkor azokat a következőképpen határozhatjuk meg: szorozzuk meg az első egyenlőséget $\sqrt{2}$-vel, és vonjuk ki belőle a másodikat, majd a másodikat szorozzuk $\sqrt{2}$-vel, és az elsőt vonjuk ki belőle. Azt kapjuk, hogy az a_n, b_n sorozatokra a következőnek kell teljesülni: $\lim a_n = y\sqrt{2} - x$, $\lim b_n = x\sqrt{2} - y$. Mivel tetszőleges valós számhoz megadható hozzá konvergáló racionális számsorozat, ezért tetszőleges x; y számpár esetén megadható a fenti feltételeknek eleget tevő a_n és b_n racionális számsorozat. Tehát a sík tetszőleges $P(x; y)$ pontjához a függvénygrafikon pontjainak $(a_n+b_n\sqrt{2};\ b_n+a_n\sqrt{2})$ koordinátákkal meghatározott sorozata konvergál.

III. $\sin\dfrac{1}{x}$ *típusú függvények*

A határérték, a folytonosság, a differenciálhatóság témakörben sok érdekes példa konstruálható az $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ hozzárendelés segítségével. Vizsgáljuk először a következő függvényt:

III./1.

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ x \mapsto 0, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

Az $x=0$ bármely környezetében a függvény „végtelen sok hullámot vet", azaz $x=0$ bármely környezetében végtelen sokszor felvesz minden, -1 és 1 közé eső értéket. Az $x=0$ pont környezetében a függvény korlátos, de sem jobb oldali, sem bal oldali határértéke nem létezik, ezért nyilván az $x=0$ helyen nem is folytonos, viszont mint összetett függvényről belátható, hogy minden más helyen folytonos.

III./2. Az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ \begin{cases} x \mapsto x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ x \mapsto 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény már az origóban is folytonos, hiszen $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$, mert $\sin\dfrac{1}{x}$ korlátos.

Folytonos ugyan a függvény, de nem differenciálható az $x=0$ helyen, ugyanis $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nem létezik, mint az előző példában láttuk.

III./3. Az $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ \begin{cases} x\mapsto x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0,\\ x\mapsto 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$

függvény már differenciálható is az $x=0$ helyen, és differenciálhányadosa

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

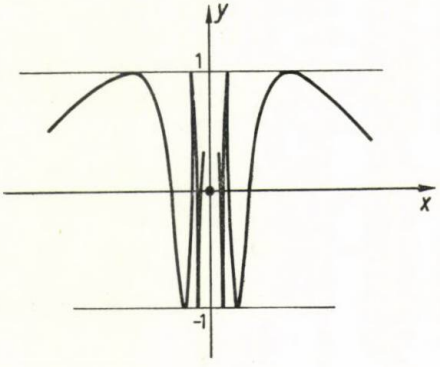
$x\neq 0$ esetben differenciálhányadosát összetett függvény differenciálási szabálya szerint kaphatjuk: $f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$. Ez a függvény már mindenütt differenciálható, de azok közé a ritka függvények közé tartozik, amelyeknek differenciálhányadosa nem folytonos. Valóban a differenciálhányados függvénynek az origóban nem létezik a határértéke, hiszen ha x tart nullához, akkor az első tag $2x\cdot\sin\frac{1}{x}$ is nullához tart, a $-\cos\frac{1}{x}$ tag viszont bármely $(-\delta;0)$ és $(0;\delta)$ intervallumon minden, -1 és 1 közé eső értéket felvesz. (Megjegyezzük, bár a differenciálhányados nem folytonos, de mint minden derivált függvény, rendelkezik az ún. *Bolzano—Darboux*-féle tulajdonsággal: azaz ha egy függvény egy intervallum minden pontjában differenciálható, akkor a differenciálhányados függvény bármely két felvett értéke közötti bármely értéket felvesz.)

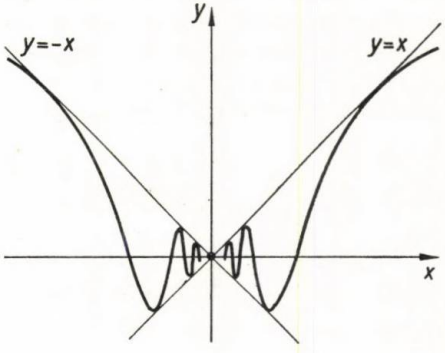
Az előzők alapján már könnyen beláthatjuk, hogy az

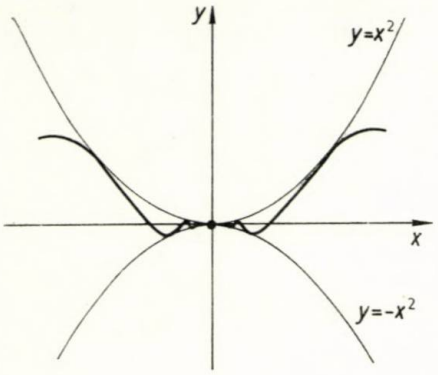
III./4. $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ \begin{cases} x\mapsto x^3\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0,\\ x\mapsto 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$

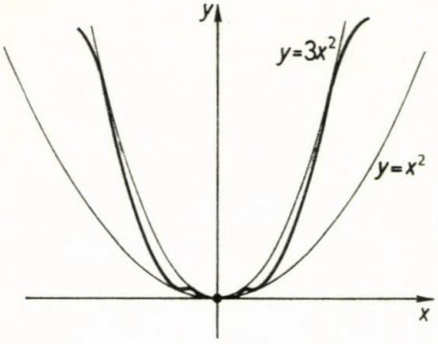
függvény mindenütt folytonosan differenciálható.

A **III./1—4.** példák segíthetnek a határérték, folytonosság, differenciálhatóság kapcsolatának megmutatásában:









A $\sin\frac{1}{x}$ típusú függvények segítségével adhatunk példát olyan függvényre, amelynek egy pontban szélsőértéke van, de deriváltja nem vált előjelet. Tudjuk, hogy a derivált előjelváltása a szélsőérték létezésének elegendő feltétele, de hogy nem szükséges ez a feltétel, arról középiskolában ritkán esik szó. Pedig a fenti függvények ismeretében a tanulók maguk is tudnak megfelelő példát konstruálni. A **III./3.** példából lesz célszerű kiindulni, ez a függvény már differenciálható, de deriváltja „nagyon ugrál". Próbáljuk olyan másodfokú függvények közé „szorítani", amelyek biztosítják a szélsőérték létezését! Némi próbálgatás után eljuthatunk az

III./5. $$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R};\quad \begin{cases} x\mapsto x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{ha}\quad x\neq 0,\\ x\mapsto 0, & \text{ha}\quad x=0 \end{cases}$$

függvényhez, amely az $x\mapsto x^2$ és $x\mapsto 3x^2$ függvények között halad, az $x=0$ pontban minimuma van. A függvény deriváltja

$$f'\colon \begin{cases} x\mapsto 4x+2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{ha}\quad x\neq 0,\\ x\mapsto 0, & \text{ha}\quad x=0 \end{cases}$$

azonban nem vált előjelet az $x=0$ pontban, ugyanis ha x tart nullához, akkor $4x+2x\cdot\sin\frac{1}{x}$ is nullához tart, de $\cos\frac{1}{x}$ bármely $(-\delta;0)$ és $(0;\delta)$ intervallumon minden, -1 és 1 közé eső értéket felvesz, ezért nullának nincs olyan jobb, illetve bal oldali környezete, amelyben a derivált pozitív, illetve negatív lenne.

IV. Befejezésül még néhány feladatot kívánok leírni, amelyek a fentiekhez kapcsolódnak, azok segítségével könnyen megoldhatók.

1. Szerkesszen olyan függvényt, amely minden valós számra értelmezett, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ egyetlen x_0 pontban sem létezik, de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ létezik!
2. Szerkesszen olyan f függvényt, amely minden valós számra értelmezett, egyetlen pontban sem folytonos, de $|f|$ mindenütt folytonos!
3. Mutassuk meg, hogy a *Dirichlet*-féle függvény periodikus! Milyen számok lehetnek a periódusai, van-e a függvénynek legkisebb periódusa?

4. Adjunk meg olyan függvényt, amely periodikus, nincs legkisebb periódusa, és végtelen sok különböző értéket vesz fel! (KöMaL, 1978. évi 7. szám P. 308.)
5. Hányszor differenciálható az $x=0$ pontban az

$$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R};\begin{cases} x\mapsto x^k\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\neq 0,\\ x\mapsto 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}\qquad (k\in\mathbf{N})$$

függvény; hány differenciálhányadosa lesz folytonos az $x=0$ helyen?
6. Mutassuk meg, hogy az

$$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R};\begin{cases} x\mapsto x+x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x^2}, & \text{ha} \quad x\neq 0\\ x\mapsto 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

függvénynek az origó bármely környezetében végtelen sok szélsőértéke van, de az origóban nincs szélsőértéke!

Irodalom

[1] *Szőkefalvi-Nagy Béla:* Valós függvények és függvénysorok. Tankönyvkiadó, Bp., 1977.
[2] *Walter Rudin:* A matematikai analízis alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1978.
[3] *P. Sz. Alekszandrov:* Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe. Akadémiai Kiadó, Bp., 1952.
[4] Kvant 1979. évi 6. szám *B. Григоренко:* Когда критических точек слишком много.

DR. KELEMEN JÓZSEF
egyetemi adjunktus
Miskolc, NME

Háromszögek racionális oldalakkal és szögfelezőkkel

Az alábbiakban meghatározunk minden olyan háromszöget, amelynek oldalai és szögfelezői racionális számok.

A háromszög oldalait a, b, c, az a oldalhoz tartozó szögfelezőt f_a, a b oldalhoz tartozót f_b, a c oldalhoz tartozót f_c, az a oldallal szemközti szöget α, a b oldallal szemköztit β, a c oldallal szemköztit γ, a háromszög félkerületét s, területét t jelöli.

1. *segédtétel*

Ha egy háromszög oldalai és szögfelezői racionális számok, akkor a háromszög területe is racionális.

Bizonyítás

Az

$$(1)\qquad \begin{cases} f_a=\dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c},\\ f_b=\dfrac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c},\\ f_c=\dfrac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}\end{cases}$$

összefüggések szorzatából

$$f_a f_b f_c = \frac{8abcs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(a+b)(a+c)(b+c)},$$

ahonnan a Hérón-féle területképlet felhasználásával

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = t = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)f_a f_b f_c}{8abcs},$$

vagyis t racionális.

2. *segédtétel*

Ha egy háromszög oldalai és szögfelezői racionális számok, akkor $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$, $\cos^4\frac{\alpha+\beta}{4}$ *és* $\cos^4\frac{\beta}{4}$ *is racionális.*

Bizonyítás

Az **1.** *segédtétel* és a

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2t}{(b+c)f_a}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c)f_a}{2bc},$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{2t}{(a+c)f_b}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \frac{(a+c)f_b}{2ac},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{2t}{(a+b)f_c}, \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)f_c}{2ab}$$

összefüggések alapján $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$ racionális. Ezt felhasználva, a

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2},$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4} = \frac{1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1-\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{4} = \frac{1-\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$\cos^4\frac{\alpha+\beta}{4} = \left(\frac{1+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}{4}, \quad \cos^4\frac{\beta}{4} = \frac{\left(1+\cos\frac{\beta}{2}\right)^2}{4}$$

összefüggések már állításunkat jelentik.

Tétel

Egy háromszögnek akkor és csak akkor racionálisak az oldalai és a szögfelezői, ha az oldalak előállíthatók

$$(2)\qquad \begin{cases} a = r(p-q)(1+pq)[(1+pq)^2-(p-q)^2], \\ b = rq(1-q^2)(1+p^2)^2, \\ c = rp(1-p^2)(1+q^2)^2 \end{cases}$$

alakban, ahol p, q, r pozitív racionális számok és

$$q < p < 1.$$

Bizonyítás

A feltétel szükséges

Bármely háromszögben fennállnak az

$$(3)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{4a \cdot \cos^4 \dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \cos^4 \dfrac{\beta}{4}}{\sin\alpha} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\alpha+\beta}{4} - \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg} \dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{4}\right) \cdot \\ \qquad \cdot \left[\left(1+\operatorname{tg} \dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{4}\right)^2 - \left(\operatorname{tg} \dfrac{\alpha+\beta}{4} - \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{4}\right)^2\right], \\ b = \dfrac{4b \cdot \cos^4 \dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \cos^4 \dfrac{\beta}{4}}{\sin\beta} \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{4} \left(1-\operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha+\beta}{4}\right)^2, \\ c = \dfrac{4c \cdot \cos^4 \dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \cos^4 \dfrac{\beta}{4}}{\sin(\alpha+\beta)} \operatorname{tg} \dfrac{\alpha+\beta}{4} \left(1-\operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha+\beta}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2 \dfrac{\beta}{4}\right)^2 \end{cases}$$

összefüggések. Bizonyításuk a

$$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{4} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{4} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{4} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{4}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \cos\dfrac{\beta}{4}},$$

$$1+\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{4}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \cos\dfrac{\beta}{4}},$$

$$\left(1+\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}\right)^2 - \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{4} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}\right)^2 = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{4} \cdot \cos^2\dfrac{\beta}{4}},$$

$$\frac{4}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\dfrac{\beta}{4} \cdot \cos\dfrac{\beta}{4} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2}}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} = \frac{\sin\dfrac{\beta}{4}}{\cos\dfrac{\beta}{4}},$$

$$1-\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{4} = \frac{\cos\dfrac{\beta}{2}}{\cos^2\dfrac{\beta}{4}}, \qquad \left(1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha+\beta}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^4\dfrac{\alpha+\beta}{4}},$$

$$\frac{4}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{4}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{4}},$$

$$1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{4} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{4}}, \quad \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^4\frac{\beta}{4}}$$

azonosságok felhasználásával történhet. A sinus-tétel szerint

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)},$$

ezért

$$\frac{4a\cdot\cos^4\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos^4\frac{\beta}{4}}{\sin\alpha} = \frac{4b\cdot\cos^4\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos^4\frac{\beta}{4}}{\sin\beta} = \frac{4c\cdot\cos^4\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos^4\frac{\beta}{4}}{\sin(\alpha+\beta)}$$

is fennáll.

Bevezetve a

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4} = p, \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{4} = q, \\ \frac{4a\cdot\cos^4\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos^4\frac{\beta}{4}}{\sin\alpha} = r \end{cases}$$

jelöléseket, a (3) összefüggések a (2) egyenleteket adják. Mivel

$$0° < \frac{\beta}{4} < \frac{\alpha+\beta}{4} < 45° \quad \text{és} \quad 0° < \alpha < 180°,$$

azért

$$0 < q < p < 1 \quad \text{és} \quad r > 0.$$

Ha a háromszög oldalai és szögfelezői racionális számok, akkor a **2.** *segédtétel* alapján p, q, r racionális számok.

A feltétel elegendő

Ha p, q, r pozitív racionális számok és $q<p<1$, akkor a (2) egyenletek pozitív racionális számokat állítanak elő. Ekkor

$$a+b-c = 8rpq(p-q)(1+pq) > 0,$$

$$a+c-b = 2r(p-q)(1+pq)(1-p^2)(1-q^2) > 0,$$

$$b+c-a = 2rq(1-p^2)[(1+pq)^2-(p-q)^2] > 0,$$

vagyis teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek; a, b, c tehát lehetnek egy háromszög oldalai. Ebben a háromszögben

$$\sqrt{bcs(s-a)} = r^2pq(1-p^4)(1-q^4)[(1+pq)^2-(p-q)^2],$$

$$\sqrt{acs(s-b)} = r^2p(p-q)(1+pq)(1-p^2)(1-q^4)[(1+pq)^2-(p-q)^2],$$

$$\sqrt{abs(s-c)} = 2r^2pq(p-q)(1+pq)(1+p^2)(1-q^2)[(1+pq)^2-(p-q)^2],$$

a háromszög szögfelezői tehát (1) szerint racionálisak.

ANDOR CSABA
tudományos segédmunkatárs
MTA Filozófiai Intézet

Lindenmayer-automaták

A Lindenmayer-automaták a sejtautomaták egy speciális osztályát alkotják; épp ezért előzetesen a sejtautomatákkal kapcsolatos legegyszerűbb fogalmakat kell tisztáznunk. Első megközelítésben a sejtautomata azonos működési elvű automatáknak (sejteknek) olyan hálózata, ahol minden egyes automata állapota csakis a saját és a vele szomszédos automaták korábbi állapotának függvénye. Ezt a megfogalmazást pontosíthatjuk, ha megmondjuk, hogy mit kell megadni egy sejtautomata definíciójához.

1. Először is egy gráfot, amelyet a továbbiakban *sejttérnek* nevezünk és S-sel jelölünk. A gráf szögpontjai a sejttér *sejtjei;* ha pedig két szögpont éllel van összekötve, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó sejtek *szomszédosak egymással.*

2. Meg kell adnunk továbbá a sejtek lehetséges *állapotait;* ezek jelölésére általában a 0, 1, 2, ... nemnegatív egészeket használjuk, és azt is kikötjük, hogy a sejtállapotok száma véges. Minden egyes sejt a $t=0, 1, 2, \ldots$ időpontokban egy-egy állapottal rendelkezik; állapotváltozás tehát csak diszkrét időpontokban lehetséges. Ha egy x sejt t időpontbeli állapota n, akkor az $x(t)=n$ jelölést használjuk.

3. Végül meg kell adnunk egy ún. *átmeneti függvényt,* amelyik megmondja, hogy egy sejt új állapotát hogyan határozza meg saját és szomszédainak régi állapota. Ha egy x sejt szomszédait $x_1, x_2, \ldots, x_k$-val jelöljük, akkor az f átmeneti függvénynek a következő formájúnak kell lennie:

$$f: (x(t), x_1(t), \ldots, x_k(t)) \to x(t+1).$$

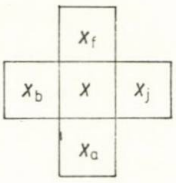
Ha tehát a sejtállapotok halmazát V-vel jelöljük, akkor f a V^{k+1} elemeihez V elemeit rendeli. Vagyis f *nem függ* magától az x sejttől; az átmeneti függvény minden sejt esetén azonos (voltaképpen ezt értjük azon, hogy az egyes sejtek azonos működési elvűek), és *nem függ* a t időponttól sem (ha a t_1 és t_2 időpontokban minden egyes sejtre $x(t_1)=x(t_2)$, akkor $x(t_1+1)=x(t_2+1)$).

Egy sejtautomata definíciójához tehát egy sejtteret (gráfot), egy állapothalmazt és egy átmeneti függvényt kell megadnunk. A Lindenmayer-automaták olyan sejtautomaták, amelyeknek sejtjei két — 0-val és 1-gyel jelölt — állapotot vehetnek fel, átmeneti függvényüket pedig az

$$x(t+1) = x(t) \oplus x_1(t) \oplus \ldots \oplus x_k(t)$$

azonosság definiálja, ahol $\oplus$ a (mod 2) összeadást jelöli (vagyis $0\oplus 0=1\oplus 1=0$ és $0\oplus 1=1\oplus 0=1$). Az egyes Lindenmayer-automaták tehát csak a sejttér megválasztásában, a sejtek elrendeződésében különböznek egymástól. Az alábbiakban két ilyen automatát fogunk közelebbről megvizsgálni.

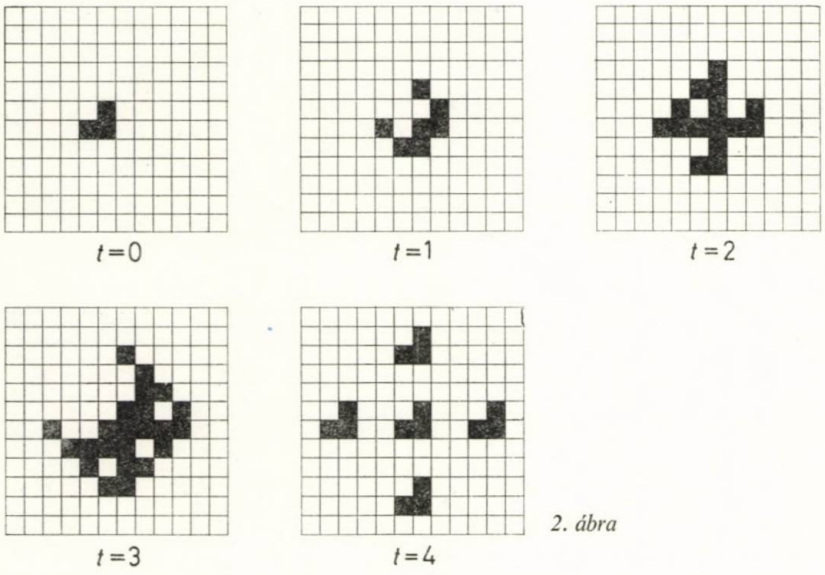
Álljon az **S** sejttér megszámlálhatóan végtelen sok sejtből, amelyek egy négyzetrács mentén helyezkednek el, és nevezzük egy sejt szomszédainak azt a négy sejtet, amelyekkel közös oldala van (1. ábra)! Az egyszerűség kedvéért az x sejt bal oldali, felső, jobb oldali és alsó szomszédait jelöljük rendre x_b-vel, x_f-fel, x_j-vel és x_a-val! Az átmeneti függvényt tehát jelen esetben a következő azonosság definiálja:



1. ábra

$$x(t+1) = x(t) \oplus x_b(t) \oplus x_f(t) \oplus x_j(t) \oplus x_a(t).$$

De úgy is fogalmazhatunk, hogy $x(t+1)=1$, ha az $x(t)$, $x_b(t)$, $x_f(t)$, $x_j(t)$, $x_a(t)$ sejtállapotok között páratlan számú 1-es állapot van; és $x(t+1)=0$, ha közöttük páros számú 1-es állapot van. Az áttekinthetőség kedvéért az ábrákon az 1-es állapotú sejteket fekete négyzetek, míg a 0 állapotúakat fehér négyzetek jelölik. A 2. ábra egy ilyen Lindenmayer-automata működését illusztrálja; kiindulásképpen ($t=0$) három sejtet tekintettünk 1-es állapotúnak, s amint látható, a $t=4$ időpontban már 15 sejt van 1-es állapotban. De még valami feltűnő az ábrán: ha a $t=0$ időponthoz tartozó alakzatot mind a négy irányban 4-4 egységgel eltoljuk, akkor éppen a $t=4$ időponthoz tartozó alakzatot kapjuk meg. Megmutatjuk, hogy ez nem véletlen, hanem egy általánosabb szabály speciális esete. Jelöljük rendre x_b^k-nal, x_f^k-nal, x_j^k-nal



2. ábra

és x_a^k-nal az x sejt k-adik bal oldali, felső, jobb oldali és alsó szomszédait (ezeket egzakt módon rekurzíve definiálhatjuk: pl. a k-adik felső szomszéd azonos a $(k\text{-}1)$-edik felső szomszéd felső szomszédjával; lásd az 1. ábrát!). Ilyen jelölések mellett igaz lesz az alábbi tétel.

1. tétel. Ha n nemnegatív egész, akkor $x(2^n)=x(0) \oplus x_b^{2^n}(0) \oplus x_f^{2^n}(0) \oplus x_j^{2^n}(0) \oplus x_a^{2^n}(0)$. (A tétel tehát azt állítja, hogy egy x sejtnek a $t=1, 2, 4, 8, \ldots$ időpontbeli állapotát úgy is kiszámíthatjuk, hogy a saját és a t-edik szomszédainak a 0 időpontbeli állapotait (mod 2) összeadjuk.)

Bizonyítás. Teljes indukciót fogunk alkalmazni. Az állítás $n=0$ esetén definíció szerint igaz. Tegyük fel most, hogy igaz az állítás $n=k$-ra! Ekkor

$$x(2^{k+1}) = x(2^k) \oplus x_b^{2^k}(2^k) \oplus x_f^{2^k}(2^k) \oplus x_j^{2^k}(2^k) \oplus x_a^{2^k}(2^k). \tag{1}$$

(Ehhez az azonossághoz úgy jutottunk, hogy a tételbeli állítást felírtuk $n=k$-ra, majd pedig a $t=0$ időpont helyett a $t=2^k$ időpontot vettük kezdeti időpontnak. Ezt a korábbiak értelmében megtehetjük, vagyis egy sejtállapotokat tartalmazó azonosságban jogunkban áll minden időponthoz ugyanazt az m nemnegatív egészet hozzáadni.) Másrészt a 3. ábra jelöléseit használva felírhatunk öt további azonosságot is:

$$x(2^k) = x(0) \oplus x_b^{2^k}(0) \oplus x_f^{2^k}(0) \oplus x_j^{2^k}(0) \oplus x_a^{2^k}(0), \tag{2}$$

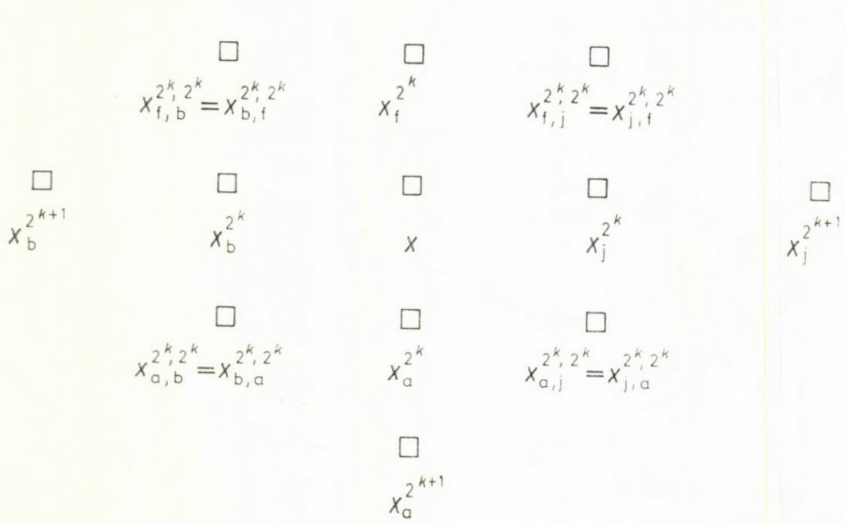
$$x_b^{2^k}(2^k) = x_b^{2^k}(0) \oplus x_b^{2^{k+1}}(0) \oplus x_{b,f}^{2^k,2^k}(0) \oplus x(0) \oplus x_{b,a}^{2^k,2^k}(0), \tag{3}$$

$$x_f^{2^k}(2^k) = x_f^{2^k}(0) \oplus x_{f,b}^{2^k,2^k}(0) \oplus x_f^{2^{k+1}}(0) \oplus x_{f,j}^{2^k,2^k}(0) \oplus x(0), \tag{4}$$

$$x_j^{2^k}(2^k) = x_j^{2^k}(0) \oplus x(0) \oplus x_{j,f}^{2^k,2^k}(0) \oplus x_j^{2^{k+1}}(0) \oplus x_{j,a}^{2^k,2^k}(0), \tag{5}$$

$$x_a^{2^k}(2^k) = x_a^{2^k}(0) \oplus x_{a,b}^{2^k,2^k}(0) \oplus x(0) \oplus x_{a,j}^{2^k,2^k}(0) \oplus x_a^{2^{k+1}}(0). \tag{6}$$

Ha most az (1) jobb oldalán álló tagokat rendre a (2)—(6) azonosságok jobb oldalaival helyettesítjük, akkor éppen a tétel állítását kapjuk az $n=k+1$ esetre. (Ha a (2)—(6) azonosságok jobb oldalait egy 5×5-ös determináns sorainak tekintjük, akkor a főátlóra szimmetrikus tagok azonosak, ezért az összegezés után csak a főátlóban levő tagok maradnak meg.)



3. ábra

A továbbiakban az 1-es állapotú sejteknek egy tetszőleges halmazát *konfigurációnak* nevezzük és C-vel jelöljük; ha minden sejt 0 állapotú, akkor üres konfigurációról beszélünk. Ha az $\mathbf{S}$ sejttérnek egy t időpontban a C konfigurációhoz tartozó sejtjei 1-es állapotban vannak, és minden más sejtje 0 állapotú, akkor ezt a tényt így jelöljük: $\mathbf{S}(t)=C$. Ha C véges sok sejtből áll, akkor véges konfigurációnak mondjuk. Minthogy

a konfigurációk halmazok, ezért nyilván lehet uniójukról, metszetükről stb. beszélni. De el is lehet tolni őket. A továbbiakban jelöljük rendre C_b^N-nel, C_f^N-nel, C_j^N-nel és C_a^N-nel azokat a konfigurációkat, amelyek C sejtjeinek N-edik bal oldali, felső, jobb oldali, illetve alsó szomszédaiból állnak. Végül egy véges konfiguráció *átmérőjének* nevezzük azt a legkisebb d nemnegatív számot, amelyre a konfiguráció lefedhető d oldalhosszúságú négyzettel (az üres konfiguráció átmérője legyen 0). A C konfiguráció átmérőjét $d(C)$-vel jelöljük. Most már megfogalmazhatjuk azt a tételt, amelynek speciális esete a 2. ábrán észlelt szabályszerűség.

2. tétel. Ha C véges konfiguráció, $\mathbf{S}(0)=C$ és n olyan természetes szám, amelyre $2^n \geqq d(C)$, akkor $\mathbf{S}(2^n)=C \cup C_b^{2^n} \cup C_f^{2^n} \cup C_j^{2^n} \cup C_a^{2^n}$.

Bizonyítás. Ha egy x sejt hozzátartozik a C konfigurációhoz, akkor $x(0)=1$, s minthogy $2^n \geqq d(C)$, ezért az x sejt 2^n-edik szomszédai nem tartoznak hozzá C-hez, vagyis $t=0$ időpontbeli állapotuk 0. Ez viszont az **1. tétel** szerint azt jelenti, hogy $x(2^n)=1$. C sejtjei tehát hozzátartoznak az $\mathbf{S}(2^n)$ konfigurációhoz. Legyen most x olyan sejt, amelyik nem tartozik hozzá C-hez! Ekkor $x(0)=0$, és két eset van:

a) Az x sejt 2^n-edik szomszédai valamennyien 0 állapotúak a $t=0$ időpontban. Ebben az esetben az **1. tétel** szerint $x(2^n)=0$; x tehát nem tartozik hozzá $\mathbf{S}(2^n)$-hez. Másrészt nem tartozhat hozzá a $C_b^{2^n}$, $C_f^{2^n}$, $C_j^{2^n}$, $C_a^{2^n}$ konfigurációkhoz sem. (Ha ugyanis pl. $C_b^{2^n}$-hez tartozna, akkor 2^n-edik jobb oldali szomszédja C-hez tartozna, vagyis 1-es állapotú lenne, ami ellentmond feltevésünknek.)

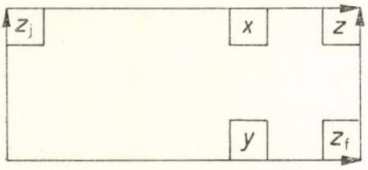
b) Az x sejt 2^n-edik szomszédai között van 1-es állapotú a $t=0$ időpontban. Ilyen nyilván csak egy lehet, hiszen ha két 2^n-edik szomszéd is 1-es állapotban lenne, akkor azokat nem lehetne egy 2^n oldalú négyzettel lefedni, ami ellentmond a $2^n \geqq d(C)$ feltételnek. Minthogy $x(0)=0$, és a 2^n-edik szomszédok között pontosan egy van 1-es állapotban a $t=0$ időpontban, ezért az **1. tétel** értelmében $x(2^n)=1$. Másrészt, ha $x_b^{2^n}(0)=1$, akkor x nyilván a $C_j^{2^n}$ konfigurációhoz, ha $x_f^{2^n}(0)=1$, akkor a $C_a^{2^n}$-hez, ha $x_j^{2^n}(0)=1$, akkor a $C_b^{2^n}$-hez, ha pedig $x_a^{2^n}(0)=1$, akkor a $C_f^{2^n}$-hez tartozik.

Beláttuk tehát, hogy egyfelől C sejtjei hozzátartoznak $\mathbf{S}(2^n)$-hez, másfelől a C-n kívüli sejtek pontosan akkor tartoznak $\mathbf{S}(2^n)$-hez, ha hozzátartoznak a $C_b^{2^n}$, $C_f^{2^n}$, $C_j^{2^n}$, $C_a^{2^n}$ konfigurációk valamelyikéhez, ami éppen a tételben szereplő azonosság teljesülését jelenti.

A **2. tétel** szerint tehát elegendően hosszú idő után bármely véges konfiguráció öt példányban megismétlődik; úgy is fogalmazhatunk, hogy a véges konfigurációk *önreprodukálóak*. De nem ez az egyetlen említésre méltó tulajdonsága ennek az automatának. Ha $\mathbf{S}(t)=C$ és $\mathbf{S}(t+1)=C'$, akkor C'-t a C konfiguráció *rákövetkezőjének*, C-t pedig a C' *megelőzőjének* nevezzük. Érdekes kérdésköre a sejtautomaták kutatásának, hogy melyek azok a konfigurációk, amelyeknek nincs megelőzőjük, vagyis amelyek csakis $\mathbf{S}(0)$ kezdeti állapotként állhatnak elő. Az ilyen konfigurációkat megkülönböztetésül *édenkertnek* nevezi a szakirodalom. Ha pedig egy konfiguráció önmagának a rákövetkezője, akkor *stabil konfigurációról* beszélünk. Nos, ebben a Lindenmayer-automatában nincs édenkert, sőt az az erősebb állítás is könnyen bizonyítható, hogy minden konfigurációnak kontinuum számosságú megelőzője van. Ami a stabil konfigurációkat illeti, a **2. tétel** egyik triviális következménye, hogy a véges konfigurációk közül csakis az üres konfiguráció stabil; könnyű viszont végtelen stabil konfigurációkat konstruálni: ilyen pl. maga S vagy a sakktáblaszerűen elrendezett 1-esekből álló konfiguráció. (Egyébként az is bizonyítható, hogy stabil konfigurációból is kontinuum számosságú van.)

És most nézzünk meg egy véges Lindenmayer-automatát! Ha megmaradunk a négyzetrácsos elrendezés mellett, és ahhoz is ragaszkodunk, hogy minden sejtnek

négy szomszédja legyen, akkor pl. a következő megoldás kínálkozik: egy $n \times k$-s téglalap szemközti oldalait a 4. ábrán látható irányításnak megfelelően „összeragaszthatjuk". Ez topológiailag azt jelenti, hogy sejtterünk egy tóruszfelületen helyezkedik el. Az áttekinthetőség kedvéért azonban érdemes megmaradnunk a síkbeli ábrázolás mellett. Ekkor az ábrán x-szel jelölt sejt felső szomszédja y lesz (és y alsó szomszédja x), z jobb oldali szomszédja z_j, felső szomszédja z_f stb. Az ilyen automatákat az alábbiakban $L(n, k)$-val jelöljük, ahol n és k a megfelelő téglalap oldalainak (sejtszámokban mért) hossza.



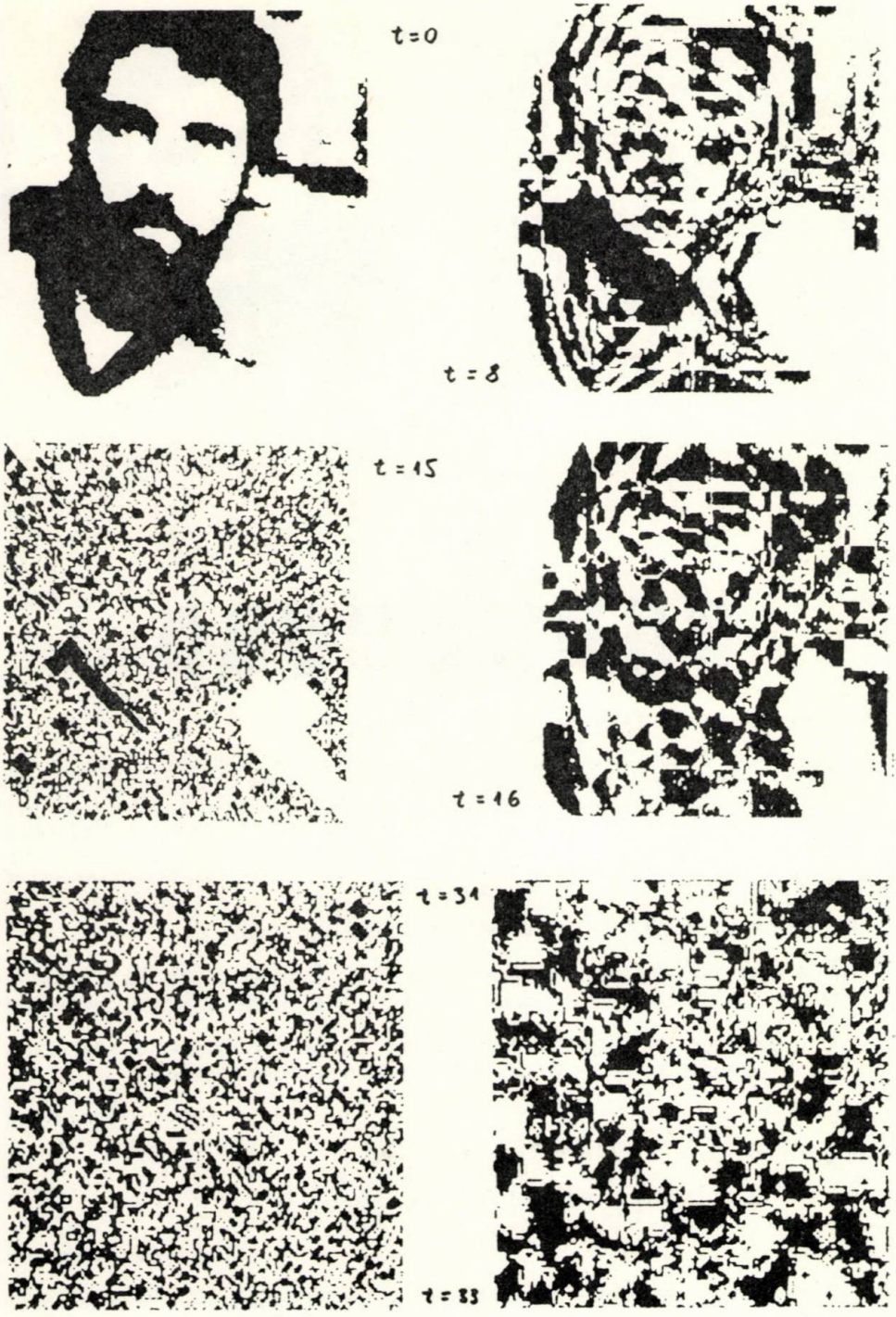
4. ábra

3. tétel. Ha $n \geqq k$, akkor az $L(2^n, 2^k)$ automata bármely x sejtjére $x(0) = x(2^{n-1})$.

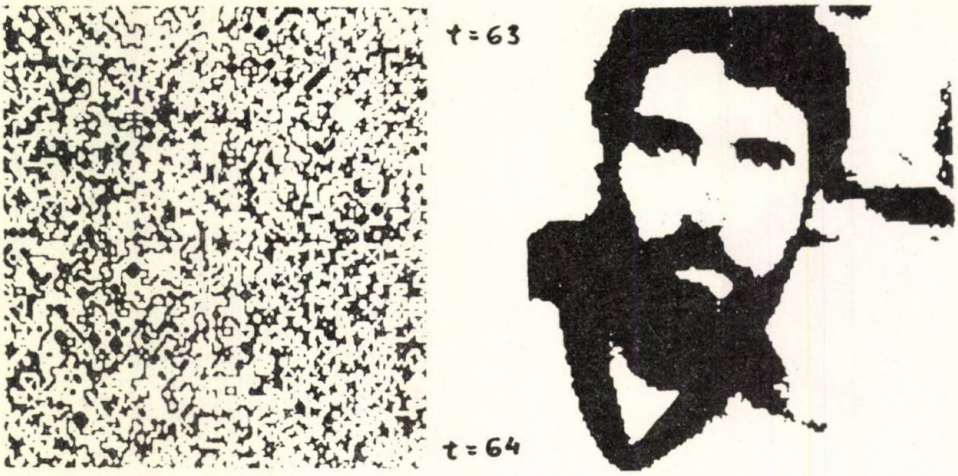
Bizonyítás. Az **1. tétel** szerint $x(2^{n-1}) = x(0) \oplus x_b^{2^{n-1}}(0) \oplus x_f^{2^{n-1}}(0) \oplus x_j^{2^{n-1}}(0) \oplus$ $\oplus x_a^{2^{n-1}}(0)$. Másrészt x-nek az m-edik bal oldali szomszédja azonos a $(2^n - m)$-edik jobb oldali szomszédjával, tehát $x_b^{2^{n-1}} = x_j^{2^{n-1}}$, következésképpen $x_b^{2^{n-1}}(0) \oplus$ $\oplus x_j^{2^{n-1}}(0) = 0$. Ugyanez elmondható x-nek a 2^{n-1}-edik felső és alsó szomszédjáról is, sőt, ha $n > k$, akkor mindkettő azonos lesz magával x-szel, hiszen ebben az esetben 2^k osztója lesz 2^{n-1}-nek. Vagyis $x_f^{2^{n-1}}(0) \oplus x_a^{2^{n-1}}(0) = 0$. A felsorolt három azonosságból pedig már következik a tételbeli állítás.

Ebben az automatában tehát minden konfiguráció ciklikusan visszatér, feltéve, hogy 2-hatványoknak választottuk a sejttér méreteit. Ennek pedig triviális következménye, hogy minden konfigurációnak pontosan egy megelőzője van (vagy a fizika nyelvén fogalmazva: ebben a sejttérben az idő elvileg megfordítható). Az 5. *a*), *b*) ábrán az $L(128, 128)$ automata működésének néhány fázisa látható. Itt, amint az ábra — és a **3. tétel** — mutatja, a konfigurációk 64 lépés után térnek vissza. Nyilván nincs (elméleti) akadálya annak sem, hogy színes képekkel hasonló eredményt produkáljunk. Ehhez elegendő meggondolnunk, hogy képezhetjük az azonos típusú Lindenmayer-automaták Descartes-szorzatát is, vagyis definiálhatunk például egy olyan sejtautomatát, amelynek állapotai számhármasok, s amelynek átmeneti függvényénél a (mod 2) összegezés természetesen koordinátánként történik. Ha most az egyes koordinátáknak egy-egy alapszínt feleltetünk meg, és a 0 a megfelelő alapszín hiányát, az 1 a meglétét jelenti, végül pedig a sejtállapotokat megfeleltetjük a bennük előforduló alapszínek keverékének, akkor meg is kaptuk a kívánt automatát.

A Lindenmayer-automaták túlságosan egyszerűek, ezért aztán inkább csak elméleti kérdések tisztázása közben fordult feléjük a figyelem. Vannak azonban olyan — kettőnél több állapotú, bonyolultabb átmeneti függvénnyel rendelkező — sejtautomaták is, amelyekkel igen jól modellezhetők a legkülönbözőbb folyamatok. A sejtautomaták „atyját", Neumann Jánost főképp az élőlények önreprodukciós képessége és az emberi agy működése érdekelte; az ő automatájában olyan konfiguráció is konstruálható, amely önreprodukáló és ugyanakkor univerzális számítógép is. Újabban egyre többen modellálják sejtautomatákkal a biológiai növekedést és az élőlények különböző önszabályozó mechanizmusait. Mindezekkel a kérdésekkel kapcsolatban a *Sejtautomaták* című tanulmánykötetet (Szerk.: Drommerné Takács Viola, Gondolat, 1978.) ajánljuk a téma iránt érdeklődő olvasónak.



5.a) ábra



5.b) ábra

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II., 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő; A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

951. Egy konvex nyolcszög minden szöge egyenlő. Bizonyítsuk be, ha a sokszög minden oldala racionális hosszúságú, akkor a szemköztes oldalak egyenlők!

952. Két számrendszer alapszámainak összege 10. Az egyikben az *ABAB* alakú számok mindig oszthatók tízzel. Melyek ezek a számrendszerek?

Orbán Gábor, Makó

953. Igazoljuk, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2+k}\right)^2 \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)(3n+1)$$

Kun Péter, Szentendre

954. Hány, topológiailag különböző, ötlapú, illetve hatlapú konvex poliéder van?

Varga Tamás, Budapest

955. Az (x_n) és a (y_n) számsorozatokat az alábbi módon definiáljuk:

$$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{k}}$$

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} \quad \text{és} \quad y_n = \sqrt{-2+x_{n-1}}, \quad k \geqq 4.$$

Válasszuk meg a k értékét úgy, hogy adott n-re

$$x_n + y_n = 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

teljesüljön!

Tóth János, Érsekújvár

956. Legyen $A=(a_{ij})_{n\times n}$ olyan négyzetes mátrix, amelyben minden sor és minden oszlop elemeinek összege a! Bizonyítsuk be, hogy az A^k mátrix bármely sorában vagy oszlopában álló elemek összege a^k, ha k pozitív egész!

Tuzson Zoltán, Brassó

Feladatmegoldások (933—938.)

933. Bizonyítsuk be, hogy az A alaphalmaz X, Y, T részhalmazaira

$$T = (X\cap\bar{T})\cup(Y\cap\bar{T})\cup(\bar{X}\cap T\cap\bar{Y})$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $X=Y=\varnothing$! ($\bar{H}$ jelöli H-nak az alaphalmazra vonatkozó komplementerét.)

I. megoldás: A feltétele elégségessége nyilvánvaló, hiszen ekkor $X\cap\bar{T}=Y\cap\bar{T}=\varnothing$ és $\bar{X}\cap T\cap\bar{Y}=A\cap T\cap A=T$. A feltétel szükséges is, mert ha $x\in X$ és $x\in T$, akkor x nem eleme az $X\cap\bar{T}$, $Y\cap\bar{T}$ és $\bar{X}\cap T\cap\bar{Y}$ részhalmazok egyikének sem, így ezek egyesítésének, a T-nek sem, ami ellentmondás. Ha viszont $x\in\bar{T}$ akkor $x\notin T$ de $x\in X\cap\bar{T}$, s így $X\cap\bar{T}\subseteq T$ miatt $x\in T$ ez pedig megint ellentmondás. Több eset nincs, mert $x\in T$ és $x\in\bar{T}$ egyikének teljesülnie kell! Ezért $X=\varnothing$. Mivel az X és Y halmazoknak nincs kitüntetett szerepe, ezért $Y=\varnothing$ is fenn kell álljon.

Bartha Gábor, Szentendre, Gőgh József, Gúta és Sziky Csilla, Budajenő

II. megoldás: A feltétel szükségességét látjuk be. Ha tehát teljesül a

$$T = (X\cap\bar{T})\cup(Y\cap\bar{T})\cup(\bar{X}\cap T\cap\bar{Y})$$

egyenlet, akkor $X\cap\bar{T}\subseteq T$ és $Y\cap\bar{T}\subseteq T$ kell legyen. De $T\cap\bar{T}=\varnothing$ miatt csakis az $X\cap\bar{T}=Y\cap\bar{T}=\varnothing$ teljesülhet. Ebből pedig $X\subseteq T$ és $Y\subseteq T$, továbbá $\bar{X}\cap T\cap\bar{Y}=T$ következik. Ezért $X=X\cap T=X\cap(\bar{X}\cap T\cap\bar{Y})=(X\cap\bar{X})\cap T\cap\bar{Y}=\varnothing$ és $Y=T\cap Y=(\bar{X}\cap T\cap\bar{Y})\cap Y=\varnothing$ kell legyen.

Schutzbach Mártonné, Siófok

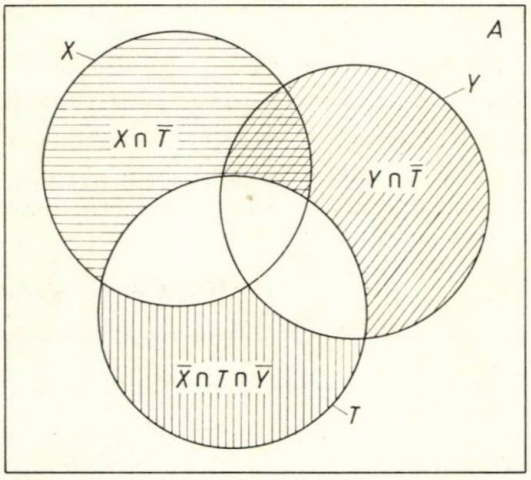
III. megoldás: A feltétel szükségességét Venn-diagrammal is igazolhatjuk (1. ábra). Az ábráról leolvasható, hogy

$$T = (X\cap\bar{T})\cup(Y\cap\bar{T})\cup(\bar{X}\cap T\cap\bar{Y})$$

csakis akkor teljesül, ha

$$X = Y = \varnothing.$$

Kovácsné, Gajdács Ibolya, Budapest



1. ábra

Megjegyzés: Bencze Mihály, Brassó a feladat következő általánosítását igazolta. Az A alaphalmaz $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geqq 2)$ részhalmazaira az

$$X_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} (X_k \cap \bar{X}_n) \cup \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \bar{X}_k \right) \cap X_n \right)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $X_k = \emptyset$, minden $1 \leqq k \leqq n-1$ esetén. Ebből $n=3$-ra a kitűzött feladatot kapjuk.

A megoldók száma: 19.

934. Egy háromszög egyik oldala 16 hosszúságegység, az ezzel szemközti szög cosinusa $-\frac{1}{4}$.

Mekkora a másik két oldal hossza, ha ezek is egész számok?

Megoldás: Ha a háromszög oldalait rendre a, b és $c=16$ jelölik, akkor feltételünk miatt a c oldala a legnagyobb, mert a vele szemköztes szög tompaszög.

Így

$$1 \leqq a \leqq b < 16 = c \tag{1}$$

feltehető.

Írjuk fel a c oldalra vonatkozó cosinus-tételt!

$$256 = a^2 + b^2 + \frac{ab}{2},$$

amiből

$$512 = 2a^2 + 2b^2 + ab. \tag{2}$$

Az (1) miatt $a^2 \leqq ab$ és $a^2 \leqq b^2$, így (2)-ből $512 \geqq 5a^2$, azaz

$$1 \leqq a \leqq 10. \tag{3}$$

A (2)-ből

$$b = \frac{-a + \sqrt{4096 - 15a^2}}{4}.$$

A b oldal csak akkor lehet egész hosszúságú, ha a $4096 - 15a^2$ különbség négyzetszám. Ez pedig csak $a=5$ és $a=8$ esetén teljesül az első tíz pozitív egész a-ra. Így két, nem egybevágó háromszög tehet eleget a feladat követelményeinek:

	a	b	c
1.	5	14	16
2.	8	12	16

Mivel mindkét háromszögre teljesül az $|a-b| < c < a+b$ háromszög egyenlőtlenség, ezért e két háromszög létezik, s mint láttuk, kielégíti a feladat feltételeit.

Bodnár György, Szerencs, Földeák Árpád, Budapest
és Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely

A megoldók száma: 29.

935. Legyen $f(x)$ az egész számok feletti polinomgyűrű egy eleme! Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$a_i = f(i) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

sorozat n egymást követő elemének k-adik hatványösszege osztható n-nel, akkor a sorozat bármely n egymás utáni elemének k-adik hatvány összege is osztható n-nel!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

Megoldás: Tekintsük a

$$d_k = f^k(i+n+1) - f^k(i+1)$$

különbséget. Ez minden k természetes egészre osztható a $d_1 = f(i+n+1) - f(i+1)$ különbséggel.

Ha $f(x)$ m-edfokú polinom, és $f(x) = \sum_{j=}^{m} a_j x^j$, akkor

$$d_1 = f(i+n+1) - f(i+1) = \sum_{j=0}^{m} a_j \left((i+n+1)^j - (i+1)^j \right).$$

Következésképp

$$n \mid d_1,$$

hiszen $$n=(i+n+1)-(i+1)\Big|(i+n+1)^j-(i+1)^j$$

minden j természetes számra.

Így $d_1\Big|_{d_k}$ miatt $n\Big|_{d_k}$ is teljesül.

Ha tehát $$n\Big|\sum_{j=1}^{n} f^k(i+j),$$

akkor az előbbiek miatt

$$n\Big|\sum_{j=1}^{n} f^k(i+1+j)-\sum_{j=1}^{n} f^k(i+j)=f^k(i+1+n)-f^k(i+1)=d_k$$

is teljesül, s így $$n\Big|\sum_{j=1}^{n} f^k(i+1+j).$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását, mert az $n\Big|\sum_{j=1}^{n} f^k(i+j)$ tulajdonság átörökíthető a $\sum_{j=1}^{n} f^k(i+r+j)$-re is, minden $-i\leqq r$ egészre. Bizonyításunkból a feladat állításánál több is következik: ha a sorozat n egymást követő elemének k-adik hatványösszege n-nel osztva m maradékot ad, akkor a sorozat bármely n egymást követő elemének k-adik hatványösszege is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Zalán Péterné, Budapest

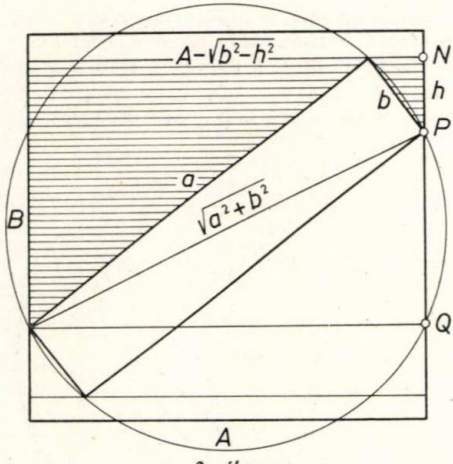
A megoldók száma: 10.

936. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy téglalap alakú szőnyeget kiteríthessünk egy ugyancsak téglalap alakú üres helyiség padozatán?

Megoldás: Legyen a szőnyeg $a\times b$, a padozat $A\times B$ méretű! Feltehetjük, hogy $a\geqq b$ és $A\geqq B$. Két eset lehetséges: a szőnyeg a szoba hosszával párhuzamosan elhelyezhető, vagy sem. Nyilvánvaló, hogy az

$$A\geqq a \quad \text{és} \quad B\geqq b \tag{1}$$

az első esetnek szükséges és elégséges feltételei.



2. ábra

A második esetben

$$a>A>b, \tag{2}$$

mert ha $b\geqq A$ volna, akkor

$$a\geqq b\geqq A\geqq B$$

miatt a szőnyeg csakis az $a=b=A=B$ esetben helyezhető el, ezt az esetet pedig már elintéztük.

Ha a (2) fennáll és a szőnyeg elhelyezhető a helyiségben, akkor elhelyezhető úgyis, hogy a szőnyeg és a helyiség középpontja azonos legyen, továbbá hogy a szőnyeg P sarka a padozat szélén legyen (2. ábra). Ekkor

$$PQ=\sqrt{a^2+b^2-A^2}.$$

Legyen $PN=h$.

A szőnyeg csakis akkor helyezhető el a padozaton, ha

$$B\geqq PQ+2h. \tag{3}$$

Hasonlóság miatt

$$\frac{h}{b}=\frac{A-\sqrt{b^2-h^2}}{a}, \tag{*}$$

ebből

$$\sqrt{b^2-h^2}=bA-ah>0, \tag{**}$$

azaz a

$$h = \frac{abA \pm b^2\sqrt{a^2+b^2-A^2}}{a^2+b^2}$$

értékeket kell megvizsgáljuk.

A

$$h = \frac{abA + b^2\sqrt{a^2+b^2-A^2}}{a^2+b^2}$$

a (**) miatt nem jön számításba, mivel ekkor $a<A$ kellene legyen, amint azt könnyen ellenőrizhetjük.

A $h=\frac{abA - b^2\sqrt{a^2+b^2-A^2}}{a^2+b^2}$ kielégíti mind a (*), mind a (**) feltételeket. Ez a h pozitív, mert

$$aA > b\sqrt{a^2+b^2-A^2} > 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$a^2A^2 > b^2(a^2+b^2-A^2),$$

ami akkor és csak akkor áll, ha

$$a > b > 0.$$

A (3) miatt tehát

$$B \geqq \frac{2abA + (a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2-A^2}}{a^2+b^2} \tag{4}$$

kell legyen.

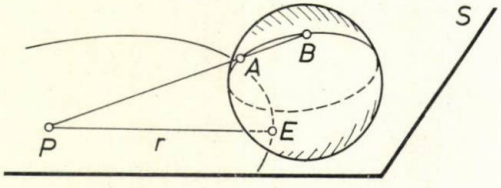
Nyilvánvaló, hogy h előbbi megválasztásával a (2) és (4) feltételek elégségesek is.

Összefoglalva: Egy $a\times b$ méretű szőnyeg az $A\times B$ méretű padozaton akkor és csak akkor helyezhető el, ha az (1) feltétel, vagy a (2) és (4) feltételek teljesülnek.

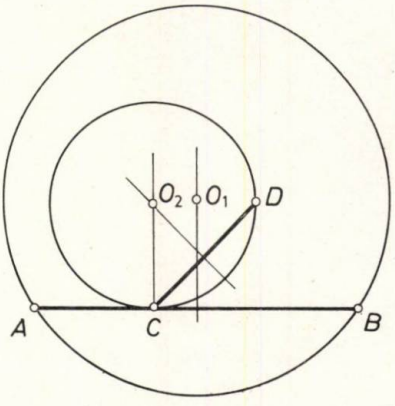
A megoldók száma: 4.

937. *A*, *B*, *C* és *D* a térnek négy olyan pontja, hogy minden, az *A* és *B* pontokat tartalmazó sík vagy gömbfelület metsz minden (az előbbiektől különböző) olyan síkot vagy gömböt, amelyre *C* és *D* illeszkedik. Milyen helyzetű a négy pont?

Megoldás: Az *AB* és *CD* szakaszoknak kell legyen közös pontja, különben van olyan *S* sík, amely a szakaszokat elválasztja, s ekkor illeszthető az *AB* és *CD* szakaszokra egy-egy olyan gömb, melyek az *S* síkot érintik, s ezért nem metszhetik egymást. Ilyen, az *A*, *B* pontokon átmenő gömb középpontjához jutunk, ha az *AB* egyenesnek az *S* síkkal való közös *P* pontja körüli, $r=\sqrt{PA\cdot PB}$ sugarú, *S*-beli kör egy *E* pontjában az *S*-re merőleges egyenesnek és az *AB* szakasz felezőmerőleges síkjának közös *O* pontját vesszük (3. ábra).



3. ábra



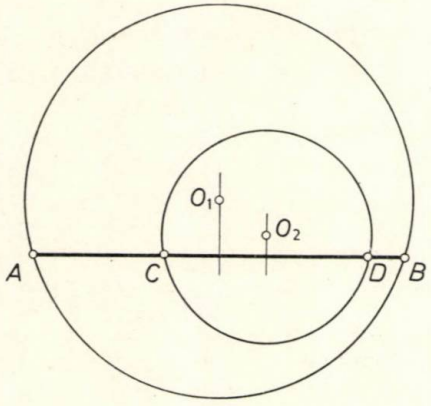
4. ábra

Ha $AB \| S$, akkor az *AB* szakasz *F* felezőmerőleges síkjának olyan *O* pontját választjuk, melynek az *S* síktól való távolsága *OA*. Ilyen *O* ponthoz jutunk, ha *F* és *S* metszésvonalának egy *E* pontjában az *S*-re merőleges egyenesnek és az *AE* szakasz felezőmerőleges síkjának közös pontját vesszük. Hasonló módon kaphatunk a *C* és *D* pontokon átmenő, *S* síkot érintő gömböt.

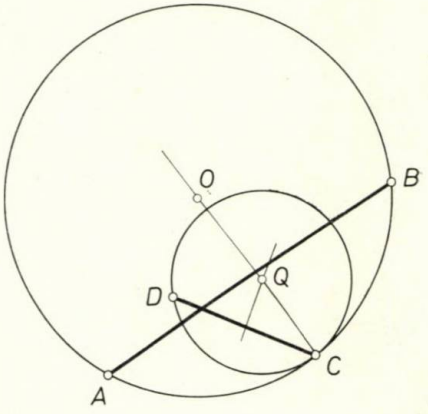
Az A, B, C és D pontok konvex burka nem lehet háromszög vagy az AB, CD szakaszok egyike, mert ezekben az esetekben az A, B, illetve C, D pontpárok egyikére illeszkedő gömb tartalmazhatja a másik pontpárra illeszkedő gömböt (4., 5. ábra). Az ábra e gömbök közös főkör metszete.

Az eddig bizonyítottak szerint, a négy pont konvex burka vagy olyan szakasz, melynek végpontjai az A, B és C, D pontpárokból valók, vagy pedig olyan négyszög, melynek átlói az AB és CD szakaszok.

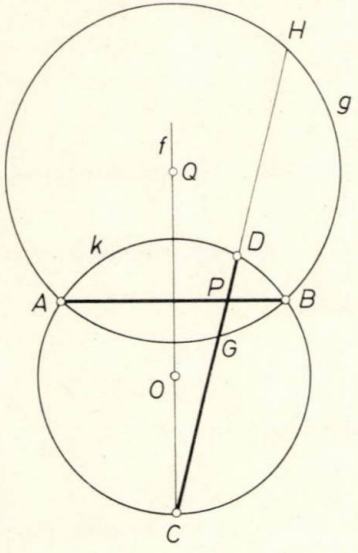
Bebizonyítjuk, hogy az utóbbi esetben a négyszög húrnégyszög kell legyen. Ha a D pont nincs az ABC háromszög körülírt körén, akkor a CD szakasz felezőmerőlegesének és az OC egyenesnek a közös Q pontja körüli QC sugarú gömb nem metszi az O közepű OA sugarú gömböt (6. ábra).



5. ábra



6. ábra



7. ábra

Összefoglalva: Az A, B, C, D pontnégyes csakis akkor rendelkezhet a feladatbeli tulajdonságokkal, ha egy körön vagy egyenesen van, mégpedig úgy, hogy az A, B pontpár elválasztja a C, D pontpárt.

Be kell még látnunk, hogy a most kimondott feltételek elégségesek is!

Ha a pontnégyes kollineáris, akkor nyilvánvaló a feladatbeli tulajdonságok teljesülése. Ha pedig a pontnégyes egy körön van úgy, hogy az A, B pontpár elválasztja a C, D pontpárt, akkor minden az A, B pontokon átmenő gömb metsz minden a C, D pontokon átmenő (az előbbiektől különböző) gömböt. Ehhez elég azt belátnunk, hogy az AB szakasz f felezőmerőlegesének bármely, az A, B, C, D körülírt k kör O középpontjától különböző Q pontja körüli $r=QA=QB$ sugarú körlemez a C, D pontok közül pontosan egyet tartalmaz, hiszen ez esetben az A, B pontokon átmenő gömb metszi a C, D pontokon átmenő gömböt, mert az előbbi gömb QAB síkmetszete a C, D pontok közül pontosan egyet tartalmaz (7. ábra).

Az AB és CD szakaszok közös P pontja a k és g körök mindegyikének belső pontja. Legyenek a CD egyenesnek g-vel közös pontjai G és H! Ekkor a P pontnak a k, illetve a g körökre vonatkozó hatványa

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PG \cdot PH. \qquad (*)$$

Mivel a P pont elválasztja mind a C, D, mind a G, H pontokat, ezért feltehetjük, hogy G a PC félegyenesen van, s így H a PD félegyenesen. Ha most

$$PC > PG, \quad \text{akkor} \quad PD < PH$$

($*$) miatt, tehát C a g-nek külső, D pedig belső pontja. Hasonlóan járunk el, ha $PC<PG$ ($PC=PG$ esetén $k=g$, azaz $O=Q$.)

Az pedig nyilvánvaló, hogy az A, B és C, D pontpárok egyikére illeszkedő sík metszi a másik pontpárra illeszkedő síkot vagy gömböt.

Ezzel beláttuk: a pontnégyes akkor és csak akkor rendelkezik a feladatbeli tulajdonságokkal, ha egy körön vagy egy egyenesen van és az A, B pontpár elválasztja a C, D pontpárt.

Szánthó Gyula, Gyula

A megoldók száma: 3.

938. Legyen (α_n) pozitív számsorozat, legyen továbbá

$$a_1 = 1 \quad \text{és} \quad a_{n+1} = a_n + \alpha_n a_n^{-1}$$

minden pozitív n egészre!

Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n$ akkor és csak akkor létezik, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ véges!

Megoldás: Az (a_n) számsorozat pozitív, mert $a_1 = 1 > 0$ és feltéve, hogy $a_n > 0$ is teljesül, az $\alpha_n > 0$ feltétel miatt

$$a_{n+1} = a_n + \alpha_n a_n^{-1} > 0.$$

Az (a_n) sorozat növekedő, mert

$$a_{n+1} - a_n = \alpha_n a_n^{-1} > 0 \tag{1}$$

az előbbiek miatt.

Az (1) összegezésével

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i}. \tag{2}$$

Először azt igazoljuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ véges. Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ sor b_n részletösszegeit!

Mivel

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) + \alpha_{n+1} = b_n + \alpha_{n+1},$$

ezért

$$b_{n+1} - b_n = \alpha_{n+1} > 0,$$

azaz a b_n részletösszegek sorozata monoton növekedő.

Figyelembe véve, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és (1) miatt $a > a_n$, kapjuk, a (2)-t is felhasználva:

$$a > a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i} > 1 + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Ebből pedig

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < a^2 - a$$

azaz a b_n sorozat felülről korlátos.

Ezzel beláttuk, hogy a b_n részletösszegek sorozata monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens is, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ véges.

Megfordítva, ha $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ akkor a (2)-ből az (a_n) korlátossága következik, mert

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i} < 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1 + \alpha$$

minden pozitív egész n-re, hiszen

$$a_n > 1 \quad \text{és} \quad b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

növekedő. Emiélfogva az (1) miatt az (a_n) számsorozat konvergens, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Bíró Béla, Barót

A megoldók száma: 7.

A megoldók névsora (933—938.)

Ambrus Gabriella, Budapest (933—935.); Bartha Gábor, Szentendre (933—936., 938.); Bencze Mihály, Brassó (933—935., 938.); Bíró Béla, Barót (934., 935., 938.); Bodnár György, Szerencs (934.); Bogdán Zoltán, Cegléd (933., 935—938.); Csányi Péter, Nagykőrös (934.); Filetóth István, Nyíregyháza (933—934.); Földeák Árpád, Budapest (934.); Gőgh József, Gúta (933—934.); Hárspatakiné, Dékány Veronika, Budapest (934.); Illésy Istvánné Kiskunfélegyháza (933—934., 936.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (933—935., 938); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (933—934.);

Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (933—934.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (933—934.); Kun Péter, Szentendre (934.); dr. Major Pál, Budapest (934.); Moyzes Károly, Szeged (934.); Náfrádi Ferenc, Győr (933—934., 938.); Nyírő László, Mezőkövesd (933—935.); Pletka Katalin, Mezőkovácsháza (934.); Simon Béla, Nyíregyháza (934.); Schutzbach Mártonné, Siófok (933—934.); Szigeti Béláné, Győr (934.); Szánthó Gyula, Gyula (933—934., 936—937.); Sziky Csilla, Budajenő (933—935.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (933. két mód, 938.); Vermes Miklós, Budapest (934.); Vigassy Lajos, Budapest (934., 937.); Zalán Péterné, Budapest (933—935.).

Beszámoló a CIEAEM (A Matematika Tanításának Tanulmányozására és Jobbá Tételére Alakult Nemzetközi Bizottság) 1980. évi találkozójáról

A CIEAEM 1980 nyarán Mexikóban, a Mexikóváros közelében levő Oaxtepecben tartotta ez évi találkozóját *MATEMATIZÁLÁS* címmel.

Az összejövetelt az előző évben elhunyt belga matematikapedagógus, Willy Servais emlékének ajánlották, aki egészen 1979-ig volt a Bizottság titkára, majd örökös tagja.

A nyitó előadásban Claude Gaulin (Kanada) emlékezett meg Willy Servaisről, majd magnófelvételről hallgatták meg a résztvevők Servais-nek az 1979. évben rendezett veszprémi találkozón felvett hozzászólásait.

A fő témával kapcsolatban néhány plenáris előadás hangzott el: „A matematizálás *mint kulturális jelenség*" (Klaus Härtig, NDK) és „A matematizálás *mint pedagógiai probléma*" (A. I. Weinzweig, USA) címmel. Ehhez kapcsolódott a találkozónak egy másik napján Guy Brousseau (Franciaország) rögtönzött előadása: „A matematizálás mint a matematikatanítás szemszögéből nézett *kutatási téma*".

A Bizottság céljai között szerepelt az is, hogy a résztvevők kapjanak minél teljesebb képet arról, milyen sajátos körülmények között dolgoznak, milyen problémákkal küzdenek a latin-amerikai országok pedagógusai. Ezt a célt szolgálta az a hat rövid előadás, amely egy-egy latin-amerikai ország tanárainak helyzetével ismertette meg a résztvevőket. Ugyanezzel a témával foglalkozott egy vitadélelőtt is.

A további munka színtere főleg az a 28 műhelyfoglalkozás volt, amelyeken a különböző országokban folyó kísérletek, pedagógiai kutatások megismerésére kerülhetett sor.

Az Ötletvásáron harminchárman állították ki az általuk használt eszközöket, filmeket, könyveket, diasorozatokat, és tizennégyen kis csoportokban foglalkozásokat vezettek.

A következő évi találkozót *GEOMETRIZÁLÁS* címmel az olaszországi Pallanzában tartják.

R. SZ. J.

Beszámoló a IV. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszusról

A kongresszust 1980. augusztus 10. és 16. között rendezték meg a kaliforniai Berkeley városban, az egyetemen (University of California, Berkeley).

A mintegy 1800 résztvevő számára igen mozgalmas programot szerveztek a rendezők. Az egyetem különböző épületeiben és a nagy központi előadótermekben párhuzamosan sok szekcióban folyt a munka.

A kongresszus idején mindössze *öt plenáris előadásra* került sor:

Nyitó előadás: Pólya György szavait olvasták fel, aki betegsége miatt maradt távol.

Hans Freudenthal (Hollandia): A matematikatanítás fő problémái.

Hermina Sinclair (Svájc): A gyerekek matematikai nyelve és fogalmai.

Seymour Papert (USA): A számítógép és a matematikai kultúra.

Hua Loo-Keng (Kína): A matematikai módszerek népszerűsítésére irányuló törekvések.

A kongresszus idejére több témában *munkacsoportok* szerveződtek, amelyek szinte mindennap összejövetelt tartottak.

Az előző kongresszusok gyakorlatához hasonlóan ismét gazdag tartalmú kiállításon szerepeltek az egyes országokban kialakított *project-ek*, amelyek a tanterv és az ahhoz készített segédanyagok, eszközök együttesét mutatták be. A részvétel nem jelentkezés, hanem meghívás alapján történt. A magyarországi új matematika-tanterv bemutatását OPI project néven kérték a rendezők.

Minden résztvevő bemutathatta munkáját oly módon, hogy előre elküldött egy tervezetet, amelynek alapján *plakátot* készített és az érdeklődők részére előadást tartott.

A kongresszus ideje alatt igen sok tanszergyártó vállalat és könyvkiadó is rendezett *kiállítást*.

Mindennap 8.30-tól 20.30-ig tartották az előadásokat és a filmvetítéseket, ugyaneddig tartottak azok a rendezvények is, ahol a résztvevők kötetlen beszélgetéseket folytathattak.

A következő kongresszus a legközelebbi olimpiai évben, 1984-ben Ausztráliában lesz.

R. SZ. J.

KÖNYVISMERTETÉS

Ismerd meg a MTESZ történetét!

A MTESZ vezetőinek egyetértő támogatásával jelent meg 1979-ben „A műszaki értelmiség három évtizedes harca a szocialista Magyarországért" című dokumentumkötet I. része (1945—1948), amely először itt publikált levéltári iratokkal bizonyítja a műszaki értelmiség szerepét a népi demokratikus forradalom időszakában.

Az iratok — melyeket bizonyára nagyon sokan megismertek azóta, hiszen az egyesületek és tagjaink megvették — jól mutatják a Zentai Béla vezette Mérnökszervezet harcát a műszaki értelmiség összefogásáért, s azért, hogy egyre jobban bekapcsolják őket a népi demokratikus forradalom feladatainak megoldásába.

Most jelent meg a II. kötet, amely az 1948—1978 közötti harminc év — s ez már a MTESZ időszaka — történetét mutatja be. 1948. június 28—29-i alakuló kongresszus jegyzőkönyvével indul a kötet. Kár, hogy már csak olvasni lehet az egykori felszólalásokat, hiszen a felszólalók közül sokan nincsenek közöttünk — Zentai Béla, Erdey-Grúz Tibor, Gerendás István és mások. A következő iratok: a MTESZ közgyűlésének határozatai, illetve elnöki, főtitkári beszédek során keresztül mutatják meg az 1950-es évek társadalmi, politikai életében a MTESZ helyét, majd jól érzékeltetik a dokumentumok az MSZMP időszakában megváltozott szövetségi politikában a műszaki értelmiség helyét és szerepét. Kik szóltak a harminc év különböző állomásain? Hevesi Gyula beszélt a MTESZ második közgyűlésén, 1950. július 15-én. 1956. szeptember 21—22-én Ajtai Miklós mint az Országos Tervhivatal elnökhelyettese beszélt, majd a mindannyiunk által jól ismert és tisztelt Valkó Endre, aki hosszú ideig a MTESZ főtitkára volt. Ő elemzi különböző időszakokban egyesületünk szerepét, s ki ne emlékezne Kiss Árpádra, aki a VII. rendkívüli közgyűlés főreferátumát tartotta, melyet közlünk kötetünkben. 1972. május 5-én, a MTESZ VIII. közgyűlésén Fock Jenő miniszterelnökként szólt a résztvevőkhöz, majd e kötet lapjain újra olvashatjuk Tímár Mátyás, Huszár István hozzászólásait. A dokumentumok sorát Lázár György miniszterelnök beszéde zárja, aki a harmincadik évfordulón értékelte a műszaki értelmiség szerepét és jelölte meg a megoldandó feladatokat.

A két kötetet dr. Németh József kandidátus szerkesztette és látta el bevezetővel, aki közel húsz éve foglalkozik a műszaki értelmiség felszabadulás utáni történetével. 1981 végére tervezzük a harmadik kötet megjelentetését, amely a MTESZ történetét dolgozza fel, s amelyhez sok dokumentumot kaptunk vidéki egyesületeinktől is.

E dokumentumok jól bizonyítják, hogy a MTESZ harmincéves története szerves része a szocialista építőmunka történetének.

Példaként is szolgálnak a történelmi dokumentumok, példa az elődöktől, akiknek ritkuló sorai a jövő felé viszik az egyesületeket, helyt adva a mában a holnapnak, a fiatal műszaki és természettudományi értelmiségnek.

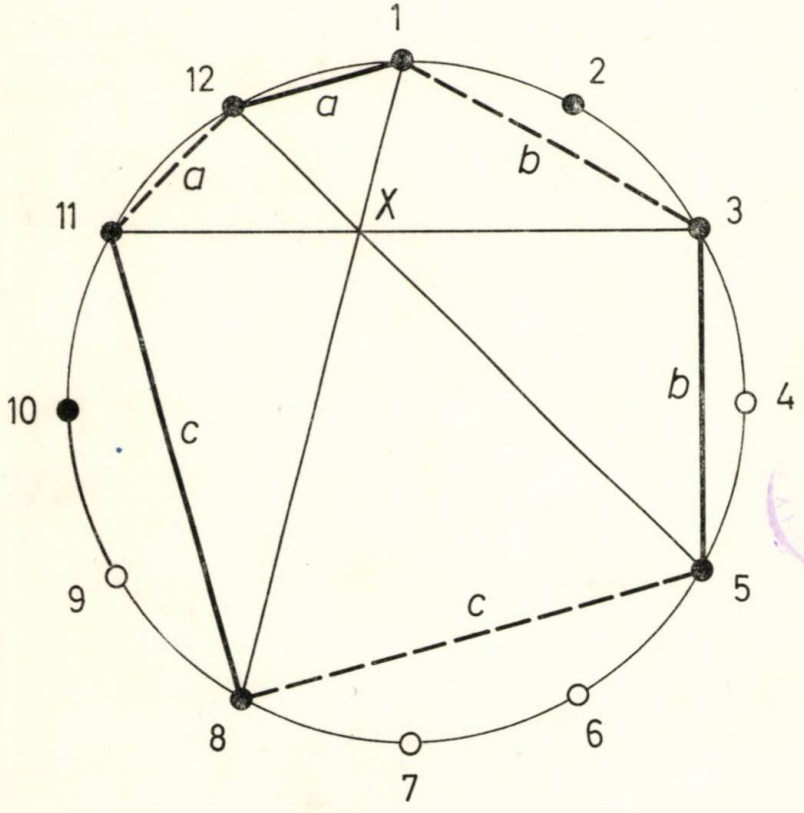
A kötetek megrendelhetők a Bolyai János Matematikai Társulat titkárságán (Budapest, Anker köz 1—3., I. emelet 111.; 1061), vidéken a MTESZ megyei szervezeteinek titkárságán is.

Egységáruk: 50,— Ft.

INDEX 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1981. április * XXVIII. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17–21.
Telefon: 211-200
81- — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Dr. Urbán János: A gimnáziumi fakultatív matematika tantárgy tanterveiről 33
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 35
Dr. Laczkovich Miklós—Dr. Simonovits Miklós: Analitikus függvények a középiskolában 35
Bánhegyi László: A legjobbak foglalkoztatása képességeiknek megfelelően és fejlesztésük matematikából az iskolában ... 45
Dr. Horváth Jenő: A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában 52
Dr. Varecza Árpád: Egy versenyfeladat és a keresési problémák 59
Dr. Kárteszi Ferenc: A szabályos tizenkétszög egy érdekes tulajdonsága 62

FELADATOK 63

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р Урбан Янош; О программах факультативного курса математики в гимназии 33
Конкурс Математического общества им. Яноша Бояи для учителей математики 35
Д-р Лацкович Миклош—д-р Шимонович Миклош: Аналитические функции в средней школе 35
Банхедьи Ласло: Занятие с особыми одарёнными по математике учениками соответственно их способностям и их дальнейшее математическое совершенствование 45
Д-р Хорват Енё: Элементы неевклидовой геометрии в средней школе (2 часть) 52
Д-р Вареца Арпад: Одно из конкурсных заданий и проблемы поиска 59
Д-р Картеси Ференц: Об одном интересном свойстве регулярного двенадцатиугольника 62

ЗАДАЧИ 63

INHALT

Dr. Urbán, János: Über die Lehrpläne des fakultativen Unterrichtsfaches Mathematik im Gymnasium 33
Der Wettbewerb der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer 35
Dr. Laczkovich, Miklós—Dr. Simonovits, Miklós: Analytische Funktionen in der Mittelschule 35
Bánhegyi, László: Die Beschäftigung der besten Schüler ihren Fähigkeiten entsprechend und ihre Entfaltung auf dem Gebiete der Mathematik in der Schule 45
Dr. Horváth Jenő: Die Elemente der nichteuklidischen Geometrie in den Mittelschulen II. 52
Dr. Varecza, Árpád: Eine Wettbewerbsaufgabe und die Bestimmungsprobleme 59
Dr. Kárteszi, Ferenc: Eine interessante Eigenschaft des regulären Zwölfecks 62

AUFGABEN 63

DR. URBÁN JÁNOS
főelőadó
Országos Pedagógiai Intézet

A gimnáziumi fakultatív matematika tantárgy tanterveiről

Az 1979—80-as tanévtől felmenő rendszerben életbe lépett a gimnáziumi nevelés és oktatás új terve. Ez a gimnáziumban a matematika oktatása terén alapvetően új helyzetet teremtett. Megszüntek a sok helyen jól működő matematika I. tagozatos osztályok, csak a speciális matematika tagozatos osztályok maradtak meg az országban összesen hét gimnáziumban. Ezzel szemben kivétel nélkül minden gimnáziumban lehetőséget kell biztosítani arra, hogy az érdeklődő tanulók harmadik osztálytól — tehát első ízben az 1981—82-es tanévtől — kezdve fakultatív választás alapján emelt óraszámban és külön csoportban tanulják a matematikát.

A gimnázium első két évében a matematika-tanterv egységes. A második osztályban az új gimnáziumi nevelési és oktatási terv fontos szerepet szán a pályaorientációs foglalkozásoknak. Ezeknek részben az a feladata, hogy segítse a tanulók pályaválasztását, ezen belül tehát azt is, hogy harmadik és negyedik osztályban a fakultatív keretben milyen tantárgyakat választanak. A matematika szempontjából ehhez nagy segítséget jelent, hogy második osztályban heti két órában, szabad sávban, külön csoportban tanulhatnak matematikát az érdeklődő tanulók. Ennek is szerepe van abban, hogy a matematikatanár a tanulókat felkészítse a harmadik osztályos választásra.

Harmadik osztálytól kezdve a matematika-tantárgy szempontjából a gimnáziumi osztálykeret felbomlik. Külön csoportban tanulják ezt a tárgyat azok, akik nem választják a fakultatív tárgyak közé. Ezek számára készült az ún. alaptanterv. Külön csoportot alkotnak azok, akik csak a kötelezően választható órakeretben veszik fel a matematikát. Ezek a tárgyat az A fakultatív tanterv szerint tanulják, harmadik osztályban heti öt, negyedik osztályban heti hat órában. Szintén külön csoportot alkotnak azok, akik a kötelezően választható mellett még a szabadon választható órakeretben is matematikát akarnak tanulni. Ezek számára készült a B fakultatív tanterv, heti óraszámuk harmadik osztályban hét, negyedik osztályban nyolc óra.

A fakultatív matematika-tantervek legfontosabb célkitűzése az, hogy az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgákra való felkészítés mellett előkészítsen az egyetemi, főiskolai matematika tanulására is. Ezt az utóbbi célt külön kiemelem, mert a tantervek világos megértéséhez és a követelmények kialakításához rendkívül fontos. Több anyagrész azért került bele a tantervbe, hogy az egyetemi és főiskolai matematikatanulást készítse elő, elkezdje a megfelelő fogalmak kialakításához a tapasztalatok gyűjtését. Természetesen ezek a témakörök még viszonylagos lezártságig sem jutnak el a

gimnáziumban. Az ilyen jellegű anyagrészekkel kapcsolatos követelmények is ezt a szintet tükrözik.

Így például az analízis témaköréből viszonylag kevés a tananyag az A tantervben. Ennek a résznek a fő célja az, hogy azok az analízisbeli fogalmak, amelyeknek világos megértése hosszabb érési időt igényel, elég korán szerepeljenek a tananyagban. Ezzel biztosítani lehet azt, hogy megfelelő tapasztalati anyag álljon a tanulók rendelkezésére. Ilyen fogalmak például: a sorozat és függvény határértéke, a folytonosság, a differenciálhányados, a határozott integrál. Az egyetemek, főiskolák matematika-tananyagában ezek a fogalmak viszonylag korán (rendszerint első évben) szerepelnek, és mivel igen sok esetben a matematika eszközként jelenik meg más tárgyak számára, elég gyorsan, töményen követik egymást. A tapasztalat azt mutatja, hogy azok számára, akik először csak az egyetemen, főiskolán és ebben az eléggé gyors tempóban találkoznak ezekkel a fogalmakkal, igen komoly nehézséget jelent világos megértésük, tudatos alkalmazásuk.

Az elmondottakból következik, hogy különösen az analízis elemeinek tanításakor elsődleges szempont a fogalmak alapos, gondos előkészítése, a tartalomhoz tapasztalatok gyűjtése. Nem jó egyszerűen arra szorítkozni, hogy azonnal szabatos, pontos és absztrakt definíciókat közlünk a tanulókkal, mert ez esetben még nem feltétlenül bizonyos, hogy tartalma is lesz a fejükben a megfelelő elnevezéseknek. Még akkor sem, ha látszólag jól tudnak megoldani rutin jellegű, de formális számolási feladatokat ebben a témakörben.

Új témák is bekerültek a fakultatív tantervek anyagába; ilyen például a valószínűségszámítás. Az A tantervben ez a témakör csak a negyedik osztályban szerepel, a B tantervben azonban a harmadik és negyedik osztályban is. A fő cél itt is a valószínűségszámítás alapfogalmainak előkészítése, megértése. Nem elsősorban a kombinatorika alkalmazását jelenti ez, hanem tapasztalatszerzést, a matematikai statisztika alapfogalmainak előkészítését is. Természetesen a kombinatorikai ismeretek alkalmazására is sor kerül.

A B tantervben harmadik osztályban új témakör még a lineáris algebra. Itt is elsősorban a matematika alkalmazásai szempontjából is jelentős témakör alapfogalmainak kialakítását, a vektorokkal, mátrixokkal végzett műveletek egyszerűbb alkalmazásainak bemutatását tűzi ki célul a tanterv.

A fakultatív matematikaórákon érdemes arra is felhasználni a tanterv adta lehetőséget, hogy a tanulókat önálló olvasásra szoktassuk. Különösen alkalmas erre a számítástechnika elemeit tartalmazó témakör. A fakultatív kísérlet tapasztalatai azt mutatják, hogy érdemes itt egy-egy tantervi anyagrészt úgy feldolgozni, hogy a rendelkezésre álló szakirodalomból kijelölt részeket arra alkalmas, vállalkozó tanulókkal feldolgoztatunk és az órán beszámoltatjuk őket.

Felhívnám még a figyelmet a tantervben szereplő szabadon választható témakörökre. A tanterv csak ajánlásokat tartalmaz, hogy megkönnyítse a tanár választását. A felsorolt témakörök közül akármelyik tekintetbe vehető, de bármilyen más, középiskolás szinten feldolgozható témakört is kiválaszthat a tanár. Érdemes itt figyelembe venni a csoport érdeklődését, képességeit. Itt is szóba jöhet az a módszer, hogy tanulókkal dolgoztatjuk fel a kiválasztott témakört.

Befejezésül néhány gondolatot szeretnék még elmondani a rendszerező összefoglalással kapcsolatban. Fontos szem előtt tartani, hogy az erre szánt időt ne csupán feladatmegoldással töltsük. A négyéves matematikaanyag rendszerző áttekintése, a hosszabb érési időt igénylő fogalmak, összefüggések viszonylagos lezárása, a nyitva maradó kérdések tisztázása mind-mind elősegíti a szóbeli felvételi vizsgára való felkészülést is és az egyetemi, főiskolai matematika tanulásához is nagy segítséget jelent.

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

A Bolyai János Matematikai Társulat a matematikatanárok önálló szakmai munkájának kibontakoztatására 1979-től évenként versenyt rendez. A versenyen részt vehetnek az alsó és középfokú oktatási intézményekben működő tanítók és tanárok.

A verseny feladatmegoldásból áll. A 8-10 feladatot minden év júliusában teszi közzé a Versenybizottság A Matematika Tanítása című folyóiratban. (A versenyfeladatok beszerezhetők még a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén, valamint a Társulat központjában és helyi tagozataiban személyesen vagy postán. Az utóbbi esetben kérjük egy megcímzett válaszboríték küldését is.)

A 8-10 feladatot azonos témakörből tűzik ki. A Versenybizottság a témaköröket a matematikának olyan fejezeteiből választja ki, amelyeknek ismerete igen jól hasznosítható a korszerű iskolai oktatásban, a tanórai vagy szakköri munkában.

A júliusban kezdődő verseny előtt a Versenybizottság minden évben megjelentet egy 2-3 cikkből álló sorozatot A Matematika Tanítása című folyóiratban, amellyel segítséget kíván nyújtani a versenyfeladatsor megoldásához. E cikksorozat feladatokkal és elméleti összefoglalóval tájékoztatja a versenyen indulni kívánókat az évi témakörökről.

A cikksorozatban megjelent feladatok megoldásának beküldését nem kéri a Versenybizottság. A feladatokat és az elméleti anyagot minden év júliusában a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén a résztvevők a cikksorozat szerzőinek irányításával szemináriumi formában dolgozzák fel.

A verseny eredményhirdetése minden év decemberében lesz. A Társulat a versenyen legeredményesebben szereplőket pénzjutalomban részesíti.

DR. LACZKOVICH MIKLÓS—DR. SIMONOVITS MIKLÓS
egyetemi adjunktus egyetemi docens
ELTE TTK Analízis I. Tanszék

Analitikus függvények a középiskolában

A középiskolás matematika egyik központi fogalma a *függvény*. Magának a függvény fogalmának kialakítása egyáltalán nem könnyű feladat. Ez természetes, hiszen a matematika története során is meglehetősen göröngyös út vezetett el a mai függvényfogalomhoz. Szerintünk ahhoz, hogy valakiben a helyes függvényfogalmat kialakítsuk, szükséges, hogy a szélsőségesen „szép" és „csúnya" függvényeket egyaránt bemutassuk.

Az, hogy egy függvény csúnya-e vagy szép, meglehetősen szubjektívnek hangzik. Mi itt valami sokkal jobban megfoghatóra gondolunk. A függvények legelemibb tulajdonságaik szerint osztályozhatók: lehetnek folytonosak, differenciálhatóak, kétszer differenciálhatóak, hatványsorral előállíthatóak stb. Itt függvényosztályok egyre szűkülő láncát soroltuk fel. Annál szebbnek mondunk egy függvényt, minél szűkebb osztályba tartozik, minél erősebb megkötéseknek tesz eleget. Így például a sehol sem folytonos ún. Dirichlet-függvény vagy a mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható Weierstrass-függvény igazán érdekes és „szívgyönyörködtető", de mi azért „csúnyának" neveznénk. A szépség megítélése szempontjából még sok más fontos függvényosztály adható meg, például a konvex-konkáv függvények, a monoton függ-

vények, a korlátos variációjú függvények osztálya.

A szélsőségesen csúnya függvények azért szolgálnak meglepetéssel, mert kiderül, hogy szinte semmit sem tudunk megjósolni viselkedésükről. Megmutatják azt is, hogy amikor bizonyos függvényosztályokat definiáltunk, azokon belül maradtak még rakoncátlan elemek is.

A szélsőségesen szép függvényekkel éppen ellenkező a helyzet: a sok-sok szabályosság az, amivel meglepnek.

Mi az alábbiakban a hatványsorokkal előállítható függvényeket nevezzük szépeknek. Matematikában ezeket analitikus függvényeknek is szokás nevezni.

A cikk célja egy olyan analízisbeli anyag bemutatása, amely összekapcsol négy dolgot:

a) hatványsorok, függvények Taylor sorfejtése,

b) függvényegyenletek, függvények jellemzése függvényegyenlettel,

c) függvények jellemzése differenciálegyenletekkel,

d) fizikai folyamatok leírása differenciálegyenletekkel.

Ennek kapcsán kiadódik egy alternatív felépítési lehetőség az exponenciális és a trigonometrikus függvényekre. A felületes szemlélőnek persze úgy tűnhet, hogy a cikk fő célja e függvények egy újabb, jobb felépítése. Hangsúlyozzuk, hogy erről itt szó sincs: először is a szerzők e függvényekre *első* felépítésnek azt a felépítést tartják helyesnek, amelyik a természetes, közvetlen utat követi, és így a középiskolában is elterjedt. Mindemellett ez a természetes felépítés számos nehézséggel jár, mely az itt adott, kiegészítő, *második* felépítésben könnyen és elegánsan megkerülhető.

Az alábbiakban felhasznált ismeretanyag lényegében az egyetemen az I. féléves matematika-fizika tanárszakosok analízis anyagának egy töredéke. Így speciális matematikai osztályokban vagy analízis iránt érdeklődő diákok számára az alábbi anyagot (ha nem is könnyen) feldolgozhatjuk szakkörökön is.

Az egész függvények

Bizonyos értelemben a legegyszerűbb függvények a *polinomok**. Hasonlóan egyszerű függvények a racionális törtfüggvények: a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ alakú függvények, ahol $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok. Egy következő igen egyszerű, de függvényekben már jóval gazdagabb függvényosztály az *egész függvények* osztálya. Ezt a függvényosztályt az alábbi módon definiáljuk:

Legyen adott egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú *formális* kifejezés, azaz, egy ún. *formális hatványsor*. Megvizsgálhatjuk, hogy milyen x értékekre konvergens a sor és azt tapasztaljuk, hogy egy 0-ra szimmetrikus, azaz $]-R, +R[$ alakú intervallumban**:

1. tétel:

Hadamard tétele: A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorra készítsük el az

$$R = \left(\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

* A következőkben mindig valós változós, valós értékű függvényekről lesz szó. Érdemes azonban megjegyezni, hogy minden eredmény egészen kis változtatással átfogalmazható komplex változós, komplex értékű függvényekre is.

** Megengedve még esetleg az intervallum egyik vagy mindkét végpontját.

nemnegatív számot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergens minden $]-R, R[$-beli valós számra, és divergens, ha $|x|>R$.

2. tétel: Legyen $f(x):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, és R a fentiekben definiált szám. Ekkor $f(x)$ differenciálható akárhányszor a $]-R, R[$-ben, és a deriváltját a $\sum a_n x^n$ hatványsor tagonkénti deriválásával is megkaphatjuk:

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum n(n-1) a_n x^{n-2},$$

$$f'''(x) = \sum n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3},$$

$$f^{(k)}(x) = \sum n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad x \in]-R, R[.$$

Nekünk csak olyan függvényekre lesz szükségünk, amelyekre $R=+\infty$, azaz $\sum a_n x^n$ minden x-re konvergens. Az ilyen függvényeket *egész függvények*nek mondjuk. Hadamard tételét és a 2. tételt is csak erre az esetre bizonyítjuk be.

3. tétel: Ha $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *a)* minden x-re konvergens és *b)* tagonként differenciálható:

$$f^{(k)}(x) = \sum n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}. \tag{1}$$

Bizonyítás:

a) $x=0$-ra nyilván igaz az állítás. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$, rögzített $x \neq 0$ esetén van olyan n_0, hogy $n>n_0$-ra $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{1}{2|x|}$. Így $|a_n x^n| \leqq \frac{1}{2^n}$, vagyis $\sum a_n x^n$ konvergens. (Sőt minden intervallumban egyenletesen abszolút konvergens is.)

b) k-szerinti teljes indukciót használunk, elég csak $k=1$-re igazolni az állítást, majd az így kapott állítást, hogy „hatványsor egyszer tagonként differenciálható", $f^{(k-1)}(x)$-re alkalmazni (ui. ez is hatványsor!). Előkészítésként végezzük el az x^n deriválását az alábbi módon:

b_1) Az elemi analízisben jól használható egyenlőtlenség az

$$|a^n - b^n| \leqq |a-b| n T^{n-1}, \quad \text{ha} \quad T = \max(|a|, |b|). \tag{2}$$

Bizonyítsuk be a fenti egyenlőtlenséget az

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-3})$$

összefüggésből! Bizonyítsuk be Lagrange középérték-tételből!

b_2) Becsüljük meg azt a „sebességet", amivel x^n differenciahányadosa a differenciálhányadoshoz tart; mondjuk a c helyen: legyen $T=2|c|+1$, $|x| \leqq T$, Ekkor

$$\frac{x^n - c^n}{x-c} - nc^{n-1} = (x^{n-1} + x^{n-2}c + x^{n-3}c^2 + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1}) - nc^{n-1} =$$

$$= (x^{n-1} - c^{n-1}) + (x^{n-2}c - c^{n-1}) + (x^{n-3}c^2 - c^{n-1}) + \dots + (xc^{n-2} - c^{n-1}) =$$

$$= (x^{n-1} - c^{n-1}) + c(x^{n-2} - c^{n-2}) + c^2(x^{n-3} - c^{n-3}) + \dots + c^{n-2}(x-c).$$

(2) alapján

$$|c^j(x^{n-1-j}-c^{n-1-j})| \leqq T^j \cdot |x-c| \cdot (n-1-j)T^{n-1-j} \leqq nT^{n-1}|x-c|.$$

Így

$$\left|\frac{x^n-c^n}{x-c}-nc^{n-1}\right| \leqq n^2T^{n-1}|x-c|. \tag{3}$$

b$_3$) Ahhoz, hogy megmutassuk a $\sum a_n x^n = f(x)$ sor tagonkénti differenciálhatóságát, arra van szükségünk, hogy a

$$\left|\frac{\sum a_n x^n - \sum a_n c^n}{x-c} - \sum n a_n c^{n-1}\right|$$

kifejezésről megmutassuk, hogy 0-hoz tart, ha $x \to c$.

$$\left|\frac{\sum a_n x^n - \sum a_n c^n}{x-c} - \sum n a_n c^{n-1}\right| = \left|\sum a_n \left(\frac{x^n-c^n}{x-c} - nc^{n-1}\right)\right| \leqq$$

$$\leqq |x-c| \left(\sum \frac{n^2}{2^n} + A_1\right) \leqq A_2|x-c|.$$

Ez a becslés némi magyarázatra szorul: először (3)-at alkalmaztuk, továbbá azt, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$, vagyis $n > n_0$ esetén $a_n T^n \leqq \frac{1}{2^n}$. Azokat a tagokat, melyekre ez nem igaz, A_1-gyel becsültük, továbbá felhasználtuk azt is, hogy $\sum n^2 2^{-n}$ konvergens (lásd 2. feladatot!). Ezzel azonban a bizonyítás végére is értünk: a differenciahányados és a sejtett differenciálhányados eltérése $A_2|x-c|$-vel becsülhető, ha x elég közel van c-hez: $|x| \leqq T$. Így a hatványsor tagonként differenciálható.

Miért bajlódtunk ennyit egy konvergens sor tagonkénti differenciálhatóságával? kérdezheti az olvasó, ha már egy kissé elfelejtette az idevágó egyetemi anyagot. Mindenesetre megjegyezzük, hogy a

$$\sum \frac{1}{2^n} \sin 4^n x$$

sor egyenletesen abszolút konvergens, de ha tagonként differenciáljuk, a kapott sor már nem konvergál pl. $x=0$-ban.

Az együttható-unicitási tétel

Helyettesítsünk (1)-be $x=0$-t. Kapjuk, hogy $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$, azaz

$$a_k = f^{(k)}(0)/k!, \quad f(x) = \sum a_k x^k = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{4}$$

A képlet persze jól ismert. Többnyire azonban arra használjuk, hogy adott f függvényt hatványsorba fejtsünk. Most fordított utat járunk: f eleve hatványsorral van definiálva és azt szeretnénk tudni, hogy 0 körüli értékei meghatározzák-e az a_n együtthatókat. Mivel a deriváltakat *meghatározzák,* tehát *az együtthatókat is.* Más szóval:

4. tétel: Ha a $]-R, R[$ intervallumban $\sum a_k x^k \equiv \sum b_k x^k$, akkor minden n-re $a_n = b_n$.

1. feladat: Bizonyítsuk be a Hadamard-tételt és a 2. tételt!

2. feladat: Mutassuk meg, hogy ha $P(n)$ polinom, akkor minden $|q|<1$-re $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)q^n$ konvergens!

Megjegyzés: A 2. feladat megoldására több módszer adódik. Egyik érdekes, bár munkaigényes módszer a $\sum_{n=1}^{N} P(n)x^n$ polinom zárt alakban való előállíthatóságát bizonyítja, $P(n)$ foka szerint, például a geometriai sor összegezésekor tanult ötlettel:

$$S(x) := \sum_{n=1}^{N} P(n)x^n\text{-re képezzük}$$

$$S(x)-xS(x) = \sum_{n=1}^{N}(P(n)x^n - P(n)x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{N}(x^n(P(n)-P(n-1))) + \\ +P(0)x - P(N)x^{N+1}$$

kifejezést. Itt $P(n)-P(n-1)$ is polinom n-ben, de eggyel alacsonyabb fokú. A módszer előnye, hogy a konvergencia bizonyítása mellett a sorösszeget is megadja.

Egy másik, kevésbé számolásos megoldáshoz jutunk, ha $\sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$-et deriváljuk, megszorozzuk x-szel, megint deriváljuk, megint megszorozzuk x-szel. A p-edik lépésben $\sum k^p x^k$-ra kapunk zárt formulát.

A konvergencia legegyszerűbb bizonyításai a majorizáláson vagy a hányados-kritériumon alapulnak.

Néhány szó függvényegyenletekről

Függvényegyenletnek nevezünk egy olyan egyenlőséget, ami egy ismeretlen függvény értékei között állapít meg összefüggést. Így pl. $f(x+1)=f(x)$ egy olyan függvényegyenlet, amelynek a megoldásai éppen az (1) szerint periodikus függvények. Az egyik legegyszerűbb függvényegyenlet (az ún. Cauchy-féle) az alábbi.

(5) $$f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Ennek nyilván megoldása minden $f=c\cdot x$ alakú függvény. Meg lehet mutatni, hogy (5)-nek vannak nem $c\cdot x$ alakú megoldásai is. Az alábbi feladatsor mutatja, hogy a függvényre tett enyhe megkötés mellett, már csak lineáris lehet a megoldás.

3. feladat: Ha f megoldása (5)-nek, akkor $f(r\cdot x)=r\cdot f(x)$ minden racionális r és tetszőleges x esetén.

4. feladat: Ha f és g $]a, b[$-n folytonos függvények, és a racionális pontokban (vagy egy tetszőleges, $]a, b[$-ben mindenütt sűrű halmaz pontjaiban) megegyeznek, akkor $f=g$.

5. feladat: Ha f megoldása (5)-nek, és folytonos egy a pontban, akkor mindenütt folytonos.

6. feladat: Ha f megoldása (5)-nek, és f folytonos legalább egy pontban, akkor $f(x)=c\cdot x$ minden x-re, ahol $c=f(1)$.

7. feladat: Legyen f mindenütt értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy $f(2x)=2\cdot f(x)$ és $f(3x)=3\cdot f(x)$ teljesül minden x-re. Mutassuk meg, hogy f lineáris!

8. feladat: Adjunk meg olyan mindenütt folytonos f függvényt, amelyre $f(2x)=2\cdot f(x)$ minden x-re, de f nem lineáris!

Függvények megadása függvényegyenletekkel, kiszámítása hatványsorokkal

A hatványsorok egyik alkalmazási területe, hogy függvényegyenleteket vagy differenciálegyenleteket tudunk megoldani segítségükkel, lényegében mechanikusan.

Tegyük fel, hogy az exponenciális függvényt, a^x-et akarjuk bevezetni. Ennek szokásos módja: természetes egészekre, egészekre, racionális számokra, majd valós számokra, és közben állandóan ellenőrizgetjük, érvényben maradtak-e jól ismert azonosságaink,

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{stb.} \tag{6}$$

Ennek az útnak egyik feltétlen előnye a természetessége, a másik feltétlen előnye, hogy lemásolja azt az utat, ahogyan a természetes számtól eljutunk a valós számokig, és így azt is világosabbá teheti: két hasonló gondolatmenet mindig hasznos. Vannak ennek az útnak hátrányai is: sok egyszerű lépésből áll, mondhatnánk, túl sokból, így kissé nehézkes. Az alábbi gondolatmenet a^x bevezetésére sokkal elegánsabb, ha már ismerjük a hatványsor fogalmát. Nem helyettesíti, de jól kiegészíti a fenti bonyolult felépítést.

Induljunk ki abból, hogy olyan $]-\infty, \infty[$-en értelmezett, folytonos függvényt keresünk, melyre (6) első fele teljesül:

$$f(x)\cdot f(y) = f(x+y). \tag{7}$$

Ha már ismerjük az a^x függvényt, akkor könnyen megmutathatjuk, hogy (7)-nek csak $f(x)=0$ és $f(x)=a^x$ alakú folytonos megoldása lehet.

9. feladat: Ha f megoldása (7)-nek, és $f\neq 0$, akkor $f(0)=1$ és f mindenütt pozitív.

Legyen most f megoldása (7)-nek, $f\neq 0$ és f legalább egy pontban folytonos. Ekkor $g(x)\overset{\text{def}}{=}\lg f(x)$ megoldása (5)-nek, legalább egy pontban folytonos, tehát az 5. feladat szerint $c\cdot x$ alakú. Így $f(x)=a^x$, ahol $a=10^c$.

A következőkben egy másik utat követünk: Feltételezzük, hogy nem ismerjük még az exponenciális és logaritmus függvényt, és éppen (7)-et akarjuk a hatványfüggvény bevezetésére felhasználni.

Tegyük fel először, hogy f megoldása (7)-nek, és differenciálható 0-ban. Ekkor ebből már következik, hogy $f(x)$ mindenütt és akárhányszor differenciálható. Valóban, $x=a+h$-ra

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f(a)\cdot\frac{f(h)-1}{h} = f(a)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h} \to f(a)\cdot f'(0)$$

(mert $h\to 0$, ha $x\to a$). Legyen $f'(0)=c$. Ekkor tehát

$$f'(x) = cf(x). \tag{8}$$

Teljes indukcióval bizonyíthatjuk, hogy $f(x)$ akárhányszor differenciálható: $k=1$-re beláttuk, és ha $k-1$-szer differenciálható, akkor (8) jobb oldala $k-1$-szer differnciálható, így f' is. Ez azt jelenti, hogy f k-szor is differenciálható.

Abból, hogy egy függvény hatványsorba fejthető, következik, hogy akárhányszor differenciálható. Fordítva nem igaz: ha akárhányszor differenciálható, abból még nem következik, hogy hatványsorba fejthető. Keressük meg azokat az egész függ-

vényeket, amelyek kielégítik a (7) függvényegyenletet! Mivel teljes indukcióval

$$f^{(k)}(x) = c^k f(x),$$

így $f^{(k)}(0) = c^k$, azaz (4)-ből

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} x^k. \tag{9}$$

Az itt definiált függvénycsaládot tehát egyértelműen meghatározza 0-beli deriváltja, c. Két problémát kell megvizsgálnunk.

a) Hol konvergens (9)? Közvetlenül is bizonyíthatnánk, hogy mindenütt, de mi a 3. tételt használjuk. $n!$ alsó becslésére van szükségünk:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \geqq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

(Ha n páros, akkor a szorzat második felének tényezőit a legkisebbel helyettesítettük. Mi a helyzet páratlan n-re?) Innen

$$\sqrt[n]{c^n/n!} = c\sqrt[n]{1/n!} \to 0.$$

Így (9) sora mindenütt konvergens, és minden rögzített c-re egy egész függvényt definiál.

b) Az is ellenőrizendő, hogy a *(9) alatti hatványsor megoldása-e a függvényegyenletnek*. Előfordulhat ugyanis, hogy (7)-nek nincs hatványsorba fejthető megoldása vagy hogy egyáltalán nincs megoldása, azonban abból a feltevésből, hogy van, egy konkrét függvényhez jutunk. Jó példa erre a következő matematikai „hasonlat": Bebizonyítjuk, hogy 1 a legnagyobb egész szám. Legyen ugyanis k a legnagyobb egész szám. Feltehető, hogy pozitív. $k^2 \leqq k$ a legnagyobb. Innen $k \leqq 1$. KÉSZ.

Az adott esetben azonban a (9) által definiált függvények mind kielégítik a (7) függvényegyenletet. Ezt most közvetlen behelyettesítéssel (és némi számolással) ellenőrizzük, de később látni fogjuk, hogy van egy lényegében számolásmentes bizonyítás is. Be kell látnunk, hogy

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} y^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} (x+y)^k. \tag{10}$$

A bal oldalon két végtelen sor szorzata áll. Ezek a sorok abszolút konvergensek, azaz a tagjainak abszolút értékéből képzett sorok is konvergensek, hiszen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{c^k}{k!} x^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c|^k}{k!} |x|^k.$$

Ismeretes, hogy abszolút konvergens sorokat szabad tagonként akármilyen sorrendben összeszorozni, és utána zárójelezni; így mindig konvergens sort kapunk, amelynek összege a két sorösszeg szorzata. A (10) bal oldalán levő két sor tagjait összeszorozva

$$\frac{c^k}{k!} x^k \cdot \frac{c^n}{n!} y^n$$

alakú számokat kapunk. Vonjuk össze ezek közül azokat, amelyekre $k+n=m$, tehát tekintsük a

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{c^k}{k!} x^k \cdot \frac{c^{m-k}}{(m-k)!} y^{m-k}$$

összeget! Ebben a k-adik tag

$$\frac{c^m}{k!(m-k)!}x^k y^{m-k} = \frac{c^m}{m!}\binom{m}{k}x^k y^{m-k},$$

tehát a vizsgált összeg

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{c^m}{m!}\binom{m}{k}x^k y^{m-k} = \frac{c^m}{m!}(x+y)^m$$

a binomiális tétel szerint. Így (10) bal oldala valóban megegyezik az

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c^m}{m!}(x+y)^m$$

összeggel. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (7) függvényegyenletnek az egész függvények körében pontosan a (9) alatti függvények a megoldásai.

A (9) alatti függvényeket rövidebb alakban írhatjuk, ha bevezetjük az $e(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ jelölést. Vegyük észre, hogy ekkor $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k x^k}{k!} = e(cx)$, $e(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$: ezt a számot e-nek nevezzük; értéke 2,71828.... Azt szeretnénk megmutatni, hogy $e(x) = e^x$, ahol e^x a régi hatványfüggvény, és általában, ha $e(c) = a$, akkor $e(cx) = a^x$. A régi hatványfüggvényről és az újról is tudjuk, külön-külön forrásból, hogy folytonosak és eleget tesznek a (7) függvényegyenletnek. Ha tehát megmutatjuk, hogy a (7) függvényegyenlet folytonos megoldása $f(1)$ ismeretében egyértelmű, akkor készen vagyunk: beláttuk, hogy a régi és új hatványozás fogalma azonos.

10. feladat: Mutassuk meg, hogy $e(x)$ szigorúan monoton növekvő $]-\infty, \infty[$-ben,

$$\lim_{x\to-\infty} e(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e(x) = \infty$$

(A monotonitás $]0, \infty[$-ben és a második lim-reláció nyilvánvaló, a többi állítás $e(x)\cdot e(-x) = 1$-ből adódik.)

Következmény; $e(x)$ minden pozitív a számot pontosan egyszer vesz fel: ha $e(c) = a$, akkor $c = \log a$ jelölést használjuk, c-t a természetes alapú logaritmusának mondjuk. Szokás még ln a-val is jelölni.

11. feladat; Ha f megoldása (7)-nek, és legalább egy pontban folytonos, akkor mindenütt folytonos.

12. feladat: Ha f és g megoldásai (7)-nek, és $f(1) = g(1)$, akkor minden racionális r-re $f(r) = g(r)$.

13. feladat; Ha f megoldása (7)-nek és nem azonosan 0, továbbá f legalább egy pontban folytonos, akkor $f(x) = e(cx)$, ahol $c = \log f(1)$.

Összefoglalva; Most már definiálhatjuk a^x-et $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k x^k}{k!}$-nak, ahol $e(c) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!} = a$ definiálja c-t (azaz: $c = \log a$), vagy, ami ugyanaz, $a^x = e(cx)$. Tudjuk, hogy az így kapott új hatványfogalom megegyezik a régivel (13. feladat).

14. feladat; Bizonyítsuk be a fenti definíció $(a^x = e(cx))$ alapján, hogy $(a^x)^y = a^{xy}$ (ha $a > 0$ és x, y tetszőleges)!

Megjegyzés; Mivel (7) minden folytonos megoldása $e(cx)$ alakú, tehát (7) minden folytonos megoldása egyben egész függvény is.

Kapcsolat a (7) függvényegyenlet és a (8) differenciálegyenlet között

Ha kiindulunk a (7) függvényegyenlet egy f megoldásából, akkor természetesen $f^c(x)$ is megoldása tetszőleges c-re. Ugyanekkor cf nem megoldása. A (8) differenciálegyenlettel éppen fordított a helyzet: Ha f megoldása, akkor cf is az, de f^c többnyire nem. Ennek ellenére azt mondhatjuk, hogy a függvényegyenlet és a differenciálegyenlet megoldásai lényegében ekvivalensek. Ez a tartalma a következő két tételnek.

5. tétel: (8) megoldásai mind Ae^{cx} alakúak valamilyen A konstansra és $f(x)=Ae^{cx}$ mindig megoldása (8)-nak.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy e^{cx} megoldása (7)-nek. Így $e^{cx}\cdot e^{-cx}=e^0=1$. Ezért $e^{cx}\neq 0$, sehol! Deriváljuk a $g(x)=e^{-cx}f(x)$ segédfüggvényt, ahol $f(x)$ (8) egy tetszőleges megoldása:

$$g'(x) = (-c)e^{-cx}f(x)+e^{-cx}(c\cdot f(x)) = 0,$$

így $g'\equiv 0$, azaz $g\equiv\text{constans}=A$. Kész.

Emellett egy *közvetlen* bizonyítás is adható az 5. tétel alábbi következményére:

6. tétel: Ha $f(x)$ megoldása (8)-nak és $f(0)=1$, akkor $f(x)$ megoldása (7)-nek is.

Bizonyítás: Az alapgondolat az, hogy a kétváltozós $f(a+x)=f(a)\cdot f(x)$ függvényegyenlet egyik változóját paraméternek tekintjük, és megmutatjuk, hogy azért érvényes a függvényegyenlet, mert

$$\frac{f(a+x)}{f(x)} \quad x \text{ szerinti deriváltja} \equiv 0.$$

Ekkor ugyanis $\dfrac{f(a+x)}{f(x)}=\text{constans}=\dfrac{f(a+0)}{f(0)}=f(a)$, és kész. Sajnos van egy kis technikai nehézség: nem tudjuk, hogy (8) $f(x)$ megoldása sehol sem 0. A következő ötlettel kerüljük el a bonyodalmat.

Legyen $g(x)=f(a+x)\cdot f(-x)$. Ekkor

$$g'(x) = f'(a+x)f(-x)-f(a+x)f'(-x) = c\big(f(a+x)f(-x)-f(a+x)f(-x)\big) = 0,$$

tehát $g(x)\equiv\text{constans}=g(0)=f(a)$. Így

$$f(a+x)\cdot f(-x) = f(a).$$

Ha most $a=0$, $f(x)\cdot f(-x)=f(0)=1$, amiből $f(x)$, $f(-x)$ sehol sem 0 és

$$f(a+x) = f(a)\cdot f(x).$$

Kész.

(Amikor igazoltuk, hogy $e(cx)$ kielégíti a (7) függvényegyenletet, akkor ezt fáradtságos számolással ellenőriztük. Ez most a 6. tételből azonnal következik, hiszen $e(cx)$ nyilván kielégíti (8)-at a 3. tétel szerint, és $e(0)=1$.)

Exponenciális folyamatok

Ha — mint Gallilei mondta — a természet a matematika nyelvén van megírva, akkor a fizika a differenciálegyenletek nyelvén. Így igazán komoly kompromisszumokat kötünk a középiskolás fizikaoktatásban, amikor a differenciálszámítást és a differenciálegyenleteket kirekesztjük. Pesze, nincs más lehetőségünk. Most mégis

megmutatjuk, hogyan lehet egy kissé feloldani ezt a kompromisszumot. Két differenciálegyenletet szándékozunk megoldani: a radioaktív bomlás differenciálegyenletét és (később) a harmonikus rezgőmozgását.

A radioaktív bomlásra a következő a jellemző: van egy anyagunk, amelyikben kétfajta atom található: elbomlandó és már elbomlott. Az elbomlott atomokkal nem kell törődnünk. Az elbomlásra váró atomok úgy is tekinthetők, mint egyedek, amelyek minden egyes 1-milliomod másodpercben egy sorsolást végeznek el, mely szerint $c \cdot 1$-milliomod valószínűséggel elbomlanak, és $1-c \cdot 1$/milliomod valószínűséggel tovább élnek. Itt c egy anyagi állandó. Azt szeretnénk tudni, hogy adott idő múlva az eredeti elbomlandó anyag hányadrésze marad meg elbomlatlanul. Az olvasó kifogásolhatja, hogy miért 10^{-6} alapidőt választottunk, de könnyen belátható, hogy lényegében azonos eredményt ad, ha pl. 10^{-3} s az alapidő és $c \cdot 10^{-3}$ az elbomlás valószínűsége. A folyamat leírására az egyik lehetőség a következő.

Jelöljük $N(t)$-vel a t időpontig elbomlatlan molekulák számát. Legyen Δt egy kis időmennyiség, ekkor a $]t, t+\Delta t[$ idő-intervallumban körülbelül $N(t)$ darab molekula vesz részt a folyamatban. Így ennek az intervallumnak minden 1-milliomod másodpercében nagyjából $c \cdot N(t) \cdot 10^{-6}$ molekula bomlik el, tehát a $]t, t+\Delta t[$ időtartam alatt elbomló molekulák száma jó közelítéssel $-\Delta N = -(N(t+\Delta t) - N(t)) = c \cdot N(t) \cdot \Delta t$. Ebből

$$-\frac{\Delta N}{\Delta t} = cN(t), \tag{11}$$

és a közelítés annál jobb, minél rövidebb a Δt időintervallum. (A valóságban az utóbbi megállapítás nem igaz: ha Δt olyan kicsi, hogy a $c\Delta t \cdot N$ is már csak néhány molekula, akkor ún. szóródási jelenségek lépnek fel.) (11) alapján tehát egy differenciálegyenlet írható fel $N(t)$-re:

$$N'(t) = -cN(t). \tag{12}$$

Ha visszamegyünk (8)-ra, látjuk, hogy ez éppen az ottani differenciálegyenlet, tehát az 5. tétel szerint $N(t) = c_1 e^{-ct}$ valamilyen c_1-re. $t=0$-t helyetesítve $N(0) = c_1$, azaz

$$N(t) = N(0)e^{-ct}$$

adódik.

A természetben nagyon sok folyamat játszódik le az exponenciális szabály szerint. Ha egy forró test kihűlését vizsgáljuk, ott is a hőmérsékletesés arányos a leadott hőmennyiséggel, az pedig a hőmérsékletkülönbséggel: Ha a környezet T_0 hőmérsékletű, az eredetileg forró test a t időben $T(t)$ hőmérsékletű, akkor Δt idő alatt $c\Delta t(T_0 - T(t))$ lesz a hőmérsékletkülönbség. Így $\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx c(T_0 - T(t))$, azaz

$$T'(t) = c(T_0 - T(t)).$$

Bevezetve a $H(t) = T_0 - T(t)$ „hűlésfüggvényt" kapjuk, hogy

$$H'(t) = -cH(t),$$

azaz $H(t) = Ae^{-ct}$. Ha a test 0 időben T^* hőmérsékletű, akkor $A = H(0) = T_0 - T^*$, azaz

$$T(t) = (T^* - T_0)e^{-ct} + T_0.$$

Még egy példát említünk. A légellenállásra különböző képletek használhatók.

Ha feltesszük, hogy a légellenállás egyenesen arányos a sebességgel, $F=kv$, akkor azt kapjuk, hogy

$$v(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right),$$

ahol m a test tömege. Ezért van, hogy a test egy idő után már lényegében nem gyorsul, beáll az $mg=F=kv$-ből is kiszámítható $mg/k=v_\infty$ sebességre. A fenti képlet azt mutatja, hogy exponenciális gyorsan áll be erre a sebességre.

Végül megjegyezzük, hogy egy kondenzátor kisülése egy ohmikus ellenálláson keresztül is exponenciális törvényt követ.

A cikk következő részében $\sin x$ és $\cos x$-re vonatkozó analóg kérdéseket vizsgálunk.

BÁNHEGYI LÁSZLÓ
középiskolai szakfelügyelő
Budapest

A legjobbak foglalkoztatása képességeiknek megfelelően és fejlesztésük matematikából az iskolában

A legjobbakkal való foglalkozás megszervezése nemcsak a pedagógusok magánügye, hanem közügy, a társadalom fejlődését meghatározó tényező. Legalább olyan fontos feladat e probléma megoldása, mint a rászorultak segítése, sőt a két feladat egymástól elválaszthatatlan bizonyos értelemben, és ezért ezeket a problémákat elsősorban az órán oldhatjuk meg jó hatásfokkal. Az összes többi próbálkozás e téren csak a finomítást segíti elő. Ez talán furcsán hangzik, de igaz, mert a legtöbb rászorult nem észbelileg gyenge, hanem csak nem szereti a matematikát valamilyen okból. (Például nem kényszerítették rá a tanulásra, ezért nincs számolástechnikája; alacsony a lexikális tudása, ezért a rendelkezésre álló idő alatt nem tud eredményes lenni; vagy sohasem volt része abban az izgalmas szellemi kalandban, amelyet egy jól sikerült feladatmegoldás jelent. Ehelyett unalmas sablonproblémák számolásigényes megoldásával kellett mindig kínlódnia.) Tehát meggyőződésem, sőt eredményeim is igazolják, hogy nagyon sok rászorultnak van természetes esze: ha fel tudjuk kelteni érdeklődését és megtalálja a tárgy szépségét, akkor ő is szívesen foglalkozik matematikával.

Például Kiss Tamás tanítványom a diákköltők első országos találkozóján I. díjat nyert, annyira humán beállítottságú volt, mégis jó matematikussá vált, az órákon versenyfeladatok megoldására is képes volt.

Ezért tisztázni szeretném, hogy kiket értek én a legjobbakon. Nem azonos a megfogalmazás azzal, hogy az illető csak matematikához ért, és semmi más nem érdekli. Sőt speciális matematika tagozatosaimra éppen azért vagyok büszke, mert sokoldalúak, kiegyensúlyozottak és boldogan élnek. Nem is lehet úgy magas színvonalon csinálni valamit, ha csak egy dologhoz ért az ember. Az egészségre is káros az egyoldalúság, különösen áll ez a matematikára, elvontsága és alapvető tulajdonsága miatt, hiszen e tárgy módszerek halmaza, amelynek segítségével tetszőleges pontossággal ismerhető meg a világ, de alkalmazni csak akkor tudja valaki ezeket a módszereket, ha ismeri vagy legalább megérti az illető szaktudomány nyelvét. A matematika és valamilyen szaktárgy egysége (kémia, fizika, nyelvtan, történelem, orvostudomány stb.) feltétlenül szükséges. Ezért a legtehetségesebb matematikus, ha van máshoz is adottsága, akkor ne is menjen matematikusnak — mindig ezt ajánlom —,

hanem azt a pályát válassza, amelyet a matematika mellett a legjobban szeret, mert a speciális matematika tagozaton megkapja azt az alapot, hogy képes legyen diplomájának megszerzése közben a TTK matematikaanyagának elsajátítására is. Így egymaga képes átírni szakterületének problémáit a matematika nyelvére és megoldani azokat.

Tehát a legjobb az, aki emberileg, erkölcsileg, akaratilag, logikailag, alkatilag kitűnik a többi közül; nem is biztos, hogy szereti a matematikát, sőt talán egészen más beállítottságú. (Például Széchi Tamásnak sem ártott természettudományos műveltsége az úszásoktatásban.) Ha az ilyen emberben fel tudom kelteni a matematika iránt az érdeklődést, az csak haszon a társadalom számára, bármivel is fog foglalkozni az életben.

Tulajdonképpen ezért volt zseniális Arany Dániel, amikor 1894-ben megalapította a Középiskolai Matematikai Lapokat (KöMaL). Ezen a lapon nemcsak nemzetközileg is elismert matematikusaink nevelkedek fel (pl. Fejér Lipót, Kármán Tódor, Riesz Marcel, Szegő Gábor, Radó Tibor, Kalmár László, Császár Ákos, Gallai Tibor, Teller Ede, Kőnig Dénes, Szele Tibor stb.), hanem nagyon sok kiválóság eszét is csiszolták, akik nem lettek ugyan matematikusok, de maradandó alkotásaikhoz hozzájárult a matematika szeretete is.

Mielőtt rátérnék a jók foglalkoztatására, a KöMaL-ban elért eredményeket szeretném vizsgálat tárgyává tenni. A különböző nyilvános, országos és nemzetközi versenyekre hely hiányában nem nagyon térek ki.

Az első pillanatra úgy tűnik — ha hosszú távon nézi az ember az elért eredményeket —, hogy a fejlődés állandó.

I. Ha pl. a KöMaL év végi összesítőjében az iskolák számát és típusát vizsgáljuk:

Tanév	Iskolák száma összesen	Iskolák típusa			
		gimnázium	szakközép., ált. isk.		egyéb
1955/56.	97	78	nincs adat	nincs adat	19
ebből Bp-en	39	30	nincs adat	nincs adat	9
1977/78.	108	88	7	13	nincs adat
ebből Bp-en	22	17	nincs adat	5	nincs adat
1978/79.	125	99	9	17	nincs adat
ebből Bp-en	26	21	1	4	nincs adat

II. Ha az értékelt tanulók számát nézzük:

Tanév	Tanulók száma	A nevezettek %-ában
1904/05.	88	nincs adat
1913/14.	110	nincs adat
1955/56.	234	47
1966—69. átlag	566	nincs adat
1975—78. átlag	637	45
1977/78.	865	35

III. Ha azt vizsgáljuk, hogy hány pontig kapott valaki dicséretet, illetve hány ponttal szerepelt átlagosan az utolsó helyezett:

Tanév	Dicséret	Utolsó helyezett átlagos pontszáma
1966—69. átlag	45 pont	13 pont
1975—78. átlag	26 pont	19 pont
1978/79.	32 pont	21 pont

Tehát látszólag a fejlődés állandó, panaszra nincs ok. Viszont ez csak akkor igaz, ha az összes iskolához, az összes tanulóhoz viszonyítom az eredményeket. Az 1978/79-es tanévben az országban 550 középiskola volt, ennek kereken 23%-ában foglalkoztak rendszeresen a KöMaL-lal, ezen belül a 275 gimnázium 36%-ában, ugyanakkor a 7000 általános iskolának kevesebb, mint 0,003%-ában*. Körülbelül 200 ezer középiskolás 0,4%-a rendszeres megoldó. Tehát egy 500-as lélekszámú gimnáziumban átlag 2 tanuló.

Budapesten 105 középiskola 21%-ában, ebből a 40 gimnázium 52%-ában, a 65 szakközépiskola 1,6%-ában, továbbá a 300 általános iskola 1,3%-ában foglalkoztak rendszeresen a lappal. Közben az 1945 előtti állapotokhoz képest négyszeresére nőtt a középiskolák száma, nyolcszorosára az érettségizetteké, és megnőtt a szakosított tantervű matematikát tanulók száma is. Hozzátartozik ezekhez az adatokhoz az a szomorú tény is, hogy az országos matematikai versenyeken az utóbbi időben többször nem lehetett kiadni az I. helyezéseket, és a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiákon is többször értünk el gyengébb eredményeket.

Az 1978. évi OKTV-n és az Arany Dániel versenyen egy-egy döntőbe átlag 50 tanulót hívtak be. Ez kb. 600—700 tanulót jelent, közülük 4 szakközépiskolás tudott helyezést elérni, viszont eredményes volt 3 általános iskolás is. Mindez azt mutatja, hogy más iskolatípusokban is vannak tehetségesek, nem csupán a gimnáziumokban, csak nem vállalják a KöMaL feladatainak megoldásával együtt járó munkát, ezért nem találhatók nagyobb számban a lap helyezettjei között.

A szakfelügyelet rendszeresen kutatja a látogatások során a visszaesés okát. A szakmai munkaközösségekkel megvitatja ezt a kérdést is, és a látott órákon tapasztaltakkal összevetve azt lehet megállapítani, hogy a nem differenciált osztályfoglalkoztatás, a nem KöMaL középpontú szakkörvezetés feltétlenül hozzájárult a jelenlegi helyzet kialakulásához. Ezeket a problémákat később részletesen tárgyalom.

Vannak viszont a visszaesésnek más, meghatározó jellegű tényezői is.

1. Nem megfelelő a verseny szervezése, propagandája. Az Élet és Tudomány és a Technika című folyóiratban is hirdetni kellene a KöMaL pontversenyének kezdetét, feltételeit, hiszen a természettudományos érdeklődésű gyerekek rendszeresen olvassák ezeket.
2. Kevés a lapban az olyan cikk, amely segít a tanulóknak a feladatok megoldásában vagy a megoldások megfelelő szintű leírásában.
3. A KöMaL-ban a gyakorlatok nagyon gyorsan nehezekké válnak, a nem nehezek is vagy számolás-, vagy írás-, vagy diszkusszióigényesek. Ennek az a következménye, hogy a sok benevezett nagy része visszaretten ettől a munkától és lemorzsolódik.

Ezért 1978-ban — elsősorban a tanárok kérésére — a szakfelügyelet kapcsolatba lépett a KöMaL szerkesztőségével és az ELTE Szakmódszertani Csoportjával. A megbeszélések során kiderült, hogy a felvetett problémák jogosak, de nehezen orvosolhatók a matematikát tanító tanárok hathatós segítsége nélkül. A szerkesztőség tagjai között ugyanis akkor nem volt gyakorló (középiskolai) pedagógus, ezért nem mindig tudták pontosan megítélni, hogy milyenek a megfelelő nehézségű feladatok az iskolaév bizonyos szakában. A feladatok könnyítésekor viszont arra is ügyelniük kellett, hogy emiatt ne essen vissza — nemzetközi viszonylatban — a lap színvonala. Ez is fontos, hiszen csak így állhatjuk meg he-

* Ez egyébként nem elítélendő, hiszen a KöMaL-ról van szó. Súlyosabb fogyatékosság, hogy az általános iskolák felső tagozatos tanulói számára jelenleg nem adnak ki országos matematikai folyóiratot hazánkban. (A szerk.)

lyünket az olimpián. Rendkívül kevés pénz áll a szerkesztőség rendelkezésére, ezért a feladatok kitűzése, majd elbírálása lényegében társadalmi munkában folyik néhány lelkes tanárjelölt segítségével. A lapban megjelenő cikkek, tanulmányok csak akkor életszerűek, ha a gyakorlat, az órákon felvetett problémák adják a témát, és ha azokat — legalábbis részben — matematikát tanítók vagy azt tanulók írják. A nem gimnazistáknak is csak akkor segíthet a lap, ha ismeri problémájukat, jelenlegi színvonalukat stb.

Nézzük, hogy mi lett az eredménye a kölcsönös konzultációknak; van-e változás az elmúlt két év alatt? Bizonyos területeken fejlődés tapasztalható. Van már egy mellékállásban levő gyakorló pedagógusa a szerkesztőségnek, bár ő matematika II. tagozaton tanít, ezért nem nagyon ismerheti az átlagos gyerekanyaggal rendelkező iskolák helyzetét. 1978/79-ben a gyakorlatok már könnyebbek voltak az egész tanév folyamán, és ez meg is látszott az év végi összesítőben. 1979/80-ban újra túl nehezek a 3-4. szám után. Sok olyan elméleti anyag felhasználása szükséges a megoldáshoz, amiről a legtöbb középiskolában szakkörön sem hallhatnak a tanulók. Sokat segített viszont a lap 59. kötetének 1. számában megjelent új pontversenykiírás, amelyben már részletes utalások vannak arra is, hogyan kell leírni a megoldott feladatot. A szerkesztőség gyorsan és részletesen tájékoztat mindenkit a feladatok elbírálásáról, a szerzett pontok számáról stb. Komoly eredmény az is, hogy általában az I. félévben megjelenik az előző tanév pontversenyének végeredménye, a KöMaL feladatmegoldó szakkörének helye és időpontjai, továbbá a II. félév első számában már megtalálhatók az évi pontverseny első feladatsorának megoldásai. Van sok jó próbálkozás, újítás a lapban. Például olimpiai előkészítő, felvételi előkészítő feladatsor, számítástechnikai rovat (elhelyezkedési lehetőséget biztosít), jó az oktotó is (ezzel jól fejleszthető a becslő-készség) stb.

A jövő fő feladata az lenne, hogy legalább megtartsuk az eddig elért eredményeket. Ez nem is olyan könnyű. A hét matematika II. tagozatos iskolában tanító tanárok véleménye azonos abban, hogy a gyerekanyag egyre gyengébb, és az a tragikus, hogy nem is a tanulók logikai készségével van baj, hanem szétszórtak, nincs akaraterejük, kitartásuk, fizikailag gyengék, egyre nehezebb „tűzbe hozni" őket. Ennek egyik oka az, hogy az általános iskolában egyes tanárok túlzásba menően csak játszva akarják elsajátíttatni velük az anyagot. A játékot fel lehet használni a nevelésben, de nem szabad csak játszadozni. A tanulás komoly munka.

Most pillanatnyilag ellentmondásos időszakban élünk, hiszen az iparban és a mezőgazdaságban egyre jobban hangsúlyozzák, hogy ha versenyben akarunk maradni, ha jobban akarunk élni, akkor világszínvonalon kell termelni is. Ugyanakkor az ifjúságtól egyre kevesebbet követelünk. Nyilvánvaló, hogy így nem érhető el a cél. Az iskolában úgy kell felkészíteni az ifjúságot fizikailag, szellemileg, erkölcsileg, akaratilag, hogy a termelésben magas színvonalú munkára legyen képes.

A matematikaoktatásban is elsősorban olyan pedagógusok eredményesek, akik nagy szakmai felkészültséggel rendelkeznek, sokat követelnek, de a gyerekek szeretik, megértik őket. Csak ilyen ember képes nagy eredményekre. Ugyanis amit a gyerek nem ismer, azt nem szeretheti. A modern festészet jobban kifejezi a valóságot a réginél, de előbb meg kell ismerni a nyelvét, mert minél jobban tükrözöm a világot, annál erősebb az absztrakció. Ugyanez a helyzet a matematika oktatásában is. Míg eljutunk a tárgy szépségeihez, addig nagyon sok a látszólag unalmas, verejtékes és fárasztó munka. Ezen kényszer nélkül átrágni magát általában csak kevés gyerek képes, hiszen annyi sok szórakoztatóbb lehetőség adódik. Nagyon szigorúan követelve juthatunk át a nehezén, és sajnos, hogy

ezt a legtöbb pedagógus — a körülményeket ismerve — nem vállalja.

A jó szakkör kialakítása is ezért okoz nehézségeket. Elterjedt szokás, hogy minden tanító tanárnak legyen szakköre, mert ha nincs, akkor ő kisebb értékű. Ez nem helyes, így az erők sem koncentrálhatók. Nyilvánvaló, hogy egy munkaközösségben nem lehet mindenkinek egyformán jó a feladatmegoldó készsége, és nincs mindenkinek elegendő ideje sem az elmélyült foglalkozásra. Persze a legtöbb esetben ez ki sem derül, ezért kellene közösen foglalkozni legalább A Matematika Tanítása és a KöMaL feladatsoraival, már csak azért is, mert ennél jobb továbbképzés úgysem képzelhető el. A feladatkiválasztó bizottság tagjainak döntő többsége eredményes versenyző volt tanuló korában, ezért jó feladatok konstruálására képes, valamint rendszeresen átnézi a külföldi matematikai folyóiratokat, tehát ily módon sokkal gyorsabban jutnak el a matematikát kedvelőkhöz a legújabb problémák, mint bármely más könyvön keresztül. (Ugyanis jó, ha egy könyv a megírása után 3 év múlva megjelenik.) Ezek a folyóiratok ugyanezt megteszik egy éven belül. Az a hasznos, ha a legjobb adottságokkal rendelkező pedagógusok vezetik a szakköröket. A szakkörvezetők helyes kiválasztása után el kell dönteni, hogy ki járjon a szakkörre. Ez az órákon alakulhat ki, ha vannak nem sablonfeladatok, ha felkeltik a tanulók érdeklődését, ha van differenciált oktatás stb. De sokat segít a jól szervezett és az év elején lebonyolított házi verseny is, ha a feladatok többsége nem igényli a gimnáziumi anyag lexikális és számolástechnikai ismereteit, hanem elsősorban logikai jellegű. Sajnos nem ezt tapasztalom, hanem inkább a tankönyvek nehezebb feladatait tűzik ki a kartársak, így azonban a rejtett tehetségek nem ugornak ki sem az órákon, sem a házi versenyeken. Ez nem zárja ki egy tavaszi házi verseny lehetőségét más célokkal és más elvekkel.

A kiválasztott tanulókat elég két csoportba osztani (I—II. és III—IV. osztályosok). Differenciált vezetéssel így elérhető, hogy mire felnőnek az alsósok, addig kellő lexikális tudásra tegyenek szert, ami alapja az eredményes versenyzésnek.

A szakköri foglalkozás csak akkor eredményes, ha KöMaL középpontú. Nagyon sokat segítenek a külföldi matematikai lapok a feladatok kiválasztásában — főleg a kolozsvári, mert magyar nyelvű. Bevallom, hogy amikor még volt szakköröm (úgy 20 évvel ezelőtt), én is KöMaL nélkül kezdtem, mert nehézséget okozott a feladatok megoldása, ezért a határidő lejárta után a megbeszélés nem volt teljes értékű, sőt így könnyen kellemetlen helyzetbe kerülhet az ember. Ezért a legtöbb pedagógus nem vállalja ezt a munkát, sőt ha lehet, a KöMaL-t is mellőzi, meg sem említi. Ha a a munkaközösség összefog, akkor ez nem lehet probléma, és közben mindenkinek fejlődik a feladatmegoldó készsége. De a hiúság általában mindent megakadályoz. Én is így jártam, és csak később jöttem, rá hogy a jól fanatizált gyerekekkel minden elérhető. A szünetekben ugyanis beszélnek a feladatokról, és ha kötődnek az iskolához, tanáraikhoz, akkor velük együtt a megbeszélés, ha nem is teljes értékű (mert soha nincs elég idő), de nagyon hasznos. Összefogva, tanár és tanuló együtt munkálkodva, örökösen új problémák után kutatva lehet csak előrejutni, és tudomásul kell venni, hogy így a tanulók feladatmegoldó készsége, lexikális tudása bizonyos területeken magasabb színvonalúvá válhat a szaktanárénál. De ettől nem félni kell; az a természetes, ha erre a legbüszkébb az ember.

A foglalkozásokon nem is az a fontos, hogy az éppen kitűzött feladatok megbeszélése megtörténjék a határidő letelte után, hanem inkább az, hogy a szakkörön hasonló KöMaL feladatokkal foglalkozzanak. A végzett és visszajáró legjobbak itt nagyon sokat segíthetnek, a tapasztalatátadás ugyanis az egyik legértékesebb nevelési eljárás, és nyilvánvaló, hogy erre egy pedagógus kevésbé

képes, mint több, már érettségizett eredményes versenyzője. (Ők szervezhetik a házi versenyeket, részt vehetnek a feladatok kiválasztásában, a versenydolgozatok javításában, tarthatnak előadásokat stb.)

Egy alkalommal matematika II. tagozatos IV. osztályos tanulóim nagyon írásigényes, régi KöMaL feladatokat kaptak házi feladatra. Erre azért volt szükség, mert eredményességük ellenére nem volt megfelelő a kitartásuk, figyelőkészségük, számolástechnikájuk. Ezért hajlamosak voltak arra, hogy ha nem tudták egyszerűen megoldani a feladatot, akkor nem oldották meg sehogy sem. (Pedig az 1970—74-es időszakban Kollár János, aki mindig az elsők között végzett, azzal volt eredményes, hogy először a „favágó" módszert alkalmazta, majd az eredmények ismeretében könnyebben találta meg az elegáns megoldást, az általánosítási lehetőségeket. Egyik OKTV döntőjén dolgozata 47 oldalt tett ki.) Ha a házi feladat megbeszélésekor azt tapasztaltam, hogy nincs meg a legegyszerűbb megoldás, akkor odaadtam a kötetet valakinek, és miközben folyt az oktatás, ő elolvasta, majd ismertette az elegáns eljárást is. Ugyanezt a kötetet használom fejszámolásra is. Az egyszerű, egy-két szép trükköt tartalmazó feladatokat tűzöm ki, ha van rá idő. Így néhány perc alatt sok jó ötlet kerül terítékre. Ha ezt lehet órán, miért ne lehetne szakkörön, és így előállíthatjuk azt a helyzetet, ami a versenyen is megvan. Így nem szokatlan a pontverseny feladatanyaga, tehát jobb lesz a teljesítmény is.

Talán még megemlítem, hogy az sem baj, ha először a tanulók csoportosan dolgoznak a KöMaL-ban, és egy névre küldik be a megoldásaikat úgy, ahogyan ezt A Matematika Tanításában a tanárok is teszik — nagyon helyesen. Úgysem tart sokáig ez az állapot; ha van sikerélmény, akkor az egészséges hiúság, a becsvágy nem engedi, hogy ez a helyzet állandósuljon. Nyilvánvaló, hogy a KöMaL-ban és a versenyeken elért eredményeket is értékelni kell az órán az osztály előtt (pl. szóban vagy pontokkal, sőt félévkor az ilyen teljesítmény még fél jegy javítást is eredményezhet stb.). Sajnos nem megszokott egyik eljárás sem, pedig eredményes módja ez az érdeklődés felkeltésének.

Nézzük, hogy mit tehetünk ezek után még az órákon a jobb versenyeredményekért, hogyan foglalkoztathatjuk a tehetségeseket a sok gyenge rendszeres segítése mellett!

A tanulók egy osztályban rendkívül heterogén közeget alkotnak; ez még jobban érzékelhető a vidéki iskolákban, ahol nagyon sok helyről kerülnek egy csoportba a gyerekek. A közeljövőben a tudáskülönbség egy osztályon belül még nagyobb mértékű lesz, hiszen az általános iskolai új matematika-tantervet először a pedagógusoknak kell magukévá tenni, és ehhez évek kellenek. Közben a gyerekek tudása az őket tanítók átállási sebességének függvényeként érzékelhető.

Nyilvánvaló, hogy csak frontálisan nem lehet mindenkit képességeinek megfelelően foglalkoztatni, a differenciált munka még sokkal több energiát, megosztott figyelmet kíván, ezért nem mindenki vállalja, egyesek alkalmatlanok rá. Mit lehet tenni? A legfontosabb természetesen az önképzés, az óralátogatás. (Azért szeretem a szakfelügyelői munkát, mert sokat tapasztalok.) Persze csak azt szabad átvenni, ami az ember adottságainak megfelel, és csak akkor lesz igazán jobb a munkája, ha a jónak tartott eljárást ötvözi egyéniségével. Így lassan kialakítható az a módszer, ami a legjobb hatásfokú és a heterogén gyerekanyagnak is legjobban felel meg.

Az órák ellenőrző része a legjobbaknak és a rászorultaknak akkor felel meg leginkább, ha erősen differenciált.

Az írásvetítő ilyenkor nagyon hasznos, továbbá jó, ha a számolásigényes házi feladatok már a szünetben felkerülnek a táblára, és az is, ha van az egész anyagból néhány perces ismétlés (logikai, lexikális, számolástechnikai); közben egyesek röpdolgozatot írhatnak, mert követelés nélkül semmit sem lehet elérni. Ilyenkor legalább azt kell biztosítani, hogy míg a rászorultak megoldják a részükre kitűzött problémákat, addig a jók nem sablon-jellegű feladatokkal foglalkozzanak. Ez jelenthet egy-egy trükköt tartalmazó feladatsort (max. 10 perc) vagy egy igényesebb problémát, mely az

óra végéig leköti azokat, akik az éppen tanultakkal tisztában vannak.

Például hány darab 1 oszlopos és 13 soros totószelvény szükséges ahhoz, hogy legalább 5 találatunk legyen?, vagy oldja meg az $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$ egyenletet, állapítsa meg $x^2+y^2-7x+6y$ minimumát, vagy mivel egyenlő $\sin\left(\frac{|x|}{x}-\frac{x}{|x|}\right)$? stb.

Időigényesek: bizonyítandó, hogy 81 egyoszlopos és 13 soros totószelvény kitölthető úgy, hogy legalább 7 találatunk legyen! Vagy: oldja meg az $\left.\begin{matrix} x^5\cdot y^3=81 \\ 10x+6y=27 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszert! Vagy: oldja meg a

$$\log_3(3-x)=\sqrt{\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$$

egyenletet stb.

Új anyagot tárgyaló órán az a legnagyobb baj, hogy a tanárok nem bíznak eléggé tanítványaikban, ezért elmondják helyettük a lényeget, és ezzel leszoktatják a legjobbakat a gondolkozásról. Például a kerületi és középponti szögek tételének levezetésekor a legnehezebb feladat annak eldöntése, hogy hány esetet kell vizsgálni az állítás igazolásához. Az érintőnégyszögeknél már az is bizonyos képességeket fejleszt, ha a gyengék méréssel fedeznek fel összefüggéseket, és ezalatt a jók bizonyítani próbálnak. De ha ilyenkor a tanár megkérdezi a jobbik csoporttól, hogy mit tudnak a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hosszáról, akkor elveszett az óra legértékesebb része.

Még egyszer hangsúlyoznám a kísérlet fontosságát a matematika oktatásában. Például a derékszögű háromszögben megállapítható mértani közép tételek levezetése előtt méréssel (szög és távolság) is felismerhetők az összefüggések. Ezután a bizonyítás már sokkal könnyebb. Hiszen így már tudják, hogy mit kell bizonyítani, és ezek után úgy is lehet differenciálni, hogy a gyenge konkrét adatokkal számol, míg a jó általánosan, betűkkel bizonyít. Aki hozzászokott a kísérletezéshez, a modellkészítéshez, az a versenyeken mindig előnyben van. Egyik eredményes tanítványom OKTV döntőn gyurma és hurkapálcikák segítségével állította elő azt a nehezen lerajzolható testet, amellyel kapcsolatos feladat megoldása rajta kívül senkinek sem sikerült. A kezdők számára rendezett 1980-as évi Arany Dániel verseny első fordulójának utolsó feladatát is azért sikerült szépen megoldania egyik tanítványomnak, mert kísérletezett. (Adott egy 80 elemű sorozat: $a_i=a_{i-1}\cdot a_{i+1}$, $a_1\cdots a_{40}=8$ és $a_1\cdots a_{80}=80$; határozza meg a sorozat elemeit! Az első két elemet ismeretleneknek választotta és ezek segítségével fel tudta írni a többit. Volt megfelelő idegrendszere, és erre is nevelni kell. Eljárásából kiderült, hogy a sorozat periodikus; ezek után a megoldás már egyszerűvé vált.)

A begyakorló részek a leginkább alkalmasak a jók és a leggyengébbek együttes foglalkoztatására. Ilyenkor nagyon fontos, hogy az éppen tanultat is gyakoroljuk, de talán még fontosabb mindig rámutatni arra, hogy a feladat által sugallt módszer nem mindig szolgáltatja a legelegánsabb megoldást. Én jobban honorálom azt, ha az éppen tanult módszer gyakorlására kitűzött feladatot már régebben ismert eljárással oldja meg valaki. (Például a vektorok, a geometriai transzformációk, az euklideszi szerkesztések mindig két ötöst érnek a koordináta-geometria begyakorlásakor stb.) A gazdaságos ellenőrzési eljárásokat is fokozottabb mértékben jutalmazom. Hangsúlyozom, hogy akkor eredményes az önálló munka, ha annak időtartama éppen megfelelő a különböző teljesítő képességű csoportok adottságainak. Tehát ez osztályonként és osztályokon belül is állandóan változik.

Például bizonyítsa be, hogy az $x^7+y^8=z^9$ egyenletnek végtelen sok megoldása van! Ez Kiss Tamás angol—orosz tagozatosnak másodikban megfelelt, és meg is oldotta. Ugyanakkor a leggyengébbeknek a $2\cdot\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}$ egyenlet önálló megoldása sem ment, ezért részletekre kellett bontani az erre szánt időt. A világos rajz, a megoldásvázlat is lehet már önálló munkafolyamat.

A statisztika és az értékelés nagyon fontos tényezők az oktatásban. Az önálló foglalkozások befejeztével ez mindig meghatározó, előrevivő tényező, segít a tanulónak, mert látja, hogy hol a helye a többihez viszonyítva, de a tanárnak is, eldöntheti pl., hogy tovább haladhat-e. Az óraközi munka értékelése pontozással vagy más módon, érdekeltté teszi a tanulókat, így szívesebben dolgoznak.

A szemléltetés, a térszemlélet fejlesztése az órán vagy házilag készített eszközökkel, szintén hasznos a jónak és a gyengének egyaránt. Előfordult már, hogy a matematika iránt nem érdeklődő tanuló kiváló kézügyességgel, térszemlélettel rendelkezett és éppen ezek miatt kedvelte meg a tárgyat. Csak észre kell venni, hogy mikor okoz problémát a térszemlélet, majd fel kell hívni az osztály figyelmét, hogy a megfelelő test elkészíthető, és persze a végzett munkát értékelni is kell.

A füzetek külalakja, rendezettsége még a versenyeken is döntő tényező. Növeli az áttekinthetőséget, ízlésre, rendszerességre nevelő. Ezért a matematikatanárnak az önálló munkák közben erre is figyelnie kell. Sőt — ha másként nem megy — másolással kell rászoktatnia tanulóit az elfogadható külalakra.

Befejezésként még egyszer hangsúlyoznám, hogy nem törekedtem teljességre, csak megpróbáltam felvetni egy-két gondolatot, közöltem néhány olyan eljárást, amelyek egyeseknél vagy nálam beváltak. Inkább vitaindítónak, gondolatébresztőnek szántam ezt a cikket, ezért is volt sarkított néha a megfogalmazás.

IRODALOM

[1] A Matematika Tanítása
1961/1. *Szakköri élet a győri gimnáziumban*
1962/2. FEKETE ZOLTÁN: *Egy matematika szakkör*
1963/4. VERES JENŐ: *A matematika szakköri foglalkozásokról*
1964/6. *Matematika tanulmányi versenyek 70 éve Magyarországon*
1971/2. VERES JENŐ: *Korszerűsítsük az iskolai matematika szakköröket!*
1973/1. LÁSZLÓ ERZSÉBET: *Az Eötvös és Kürschák versenyekről és nyerteseikről*
1975/1. LUKÁCS OTTÓ: *A Középiskolai Matematikai Lapokról*
1975/4. DR. SCHARNITZKY VIKTOR: *A matematika versenyfeladatok irodalmáról*
[2] BIZÁM—HERCZEG: *Sokszínű logika*
[3] FRIED—LÁNCZI—SURÁNYI: *„Ki miben tudós?"*

DR. HORVÁTH JENŐ
tanszékvezető egyetemi docens
ELTE TTK

A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában II.

Az előző cikkünk (A Matematika Tanítása 1980. évi 6. sz.) gondolatmenetét folytatva a háromszög területével és ehhez kapcsolódó néhány feladattal foglalkozunk.

Az euklideszi geometriában jól ismert, hogy ha egy ABC háromszög területe állandó és AB rögzített, akkor a harmadik csúcs (C) két, AB-vel párhuzamos egyenesen van, továbbá e háromszögek AB-hez tartozó középvonala párhuzamos AB-vel és fele annak. Ismert az is, hogy ha egy háromszögben két oldal (AB, AC) állandó, akkor a terület maximális, ha $\alpha=90°$, továbbá a terület $\alpha<90°$ esetén α-nak szigorúan monoton növekvő, $\alpha>90°$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő függvénye.

Cikkünk első részében az előzők megfelelőit fogjuk megkeresni gömbfelületen és hiperbolikus síkon. Mégpedig egységes tárgyalást adunk, amely magába foglalja az euklideszi esetet is.

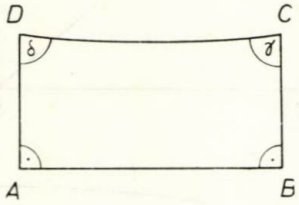
A cikkünk második részében éppen az euklideszi esetet kizárva a háromszög területével foglalkozunk gömbfelületen és hiperbolikus síkon.

1.1. Bevezetőben foglalkozunk a *Saccheri-féle négyszöggel* és néhány tulajdonságával. *Egy négyszöget Saccheri-féle négyszögnek (később röviden* S*-négyszögnek) nevezünk, ha — a szokásos jelölést használva —*

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$AD = BC.$$

AB-t nevezzük az S*-négyszög alapjának, AD-t és BC-t szárának.* (1. ábra.)



1. ábra

Abból, hogy AB oldalfelező merőlegesére az S-négyszög szimmetrikus, következik, hogy

$$\gamma = \delta. \tag{2}$$

γ és δ nagyságáról itt semmit sem mondunk. (Egyébként $\gamma=\delta>\frac{\pi}{2}$ a szférikus esetet, $\gamma=\delta=\frac{\pi}{2}$ az euklideszi esetet, $\gamma=\delta<\frac{\pi}{2}$ a hiperbolikus esetet adja.)

1.2. *Az egyenes által határolt egyik félsíkban (félgömbön) az egyenestől egyenlő távolságra levő pontok összességét az egyenes távolság-vonalának, magát az egyenest a távolság-vonal alapegyenesének nevezzük.*

Jól ismert, hogy az euklideszi síkon a távolság-vonal egyenes, gömbfelületen viszont kiskör. Hiperbolikus síkon hiperciklus a neve. Csak az euklideszi sík tulajdonsága, hogy egyenes távolság-vonala egyenes. Clavio (1574) a párhuzamossági axiómát a következővel helyettesítette: „Adott egyenessel határolt félsíkon az egyenestől egyenlő távolságra levő pontok egyenest alkotnak."

1.2.1. *Legyen t az e egyenes távolság-vonala, Q a sík tetszőleges pontja, m Q-ból e-re húzott merőleges egyenes, továbbá P_0 t és m metszéspontja, P t tetszőleges pontja! Állítás:*

1.2.1.1. *t szimmetrikus m-re,*

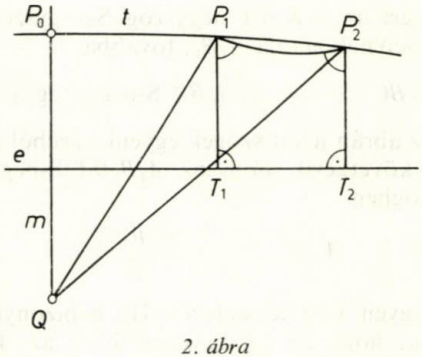
1.2.1.2. *PQ távolság a P_0P ív szigorúan monoton növekvő függvénye.*

Bizonyítás: Az **1.2.1.1.** állítás a távolság-vonal definíciójának egyszerű következménye.

Legyen $P_1, P_2 \in t$ és $\overset{\frown}{P_0P_2} > \overset{\frown}{P_0P_1}$. Megmutatjuk, hogy $QP_2 > QP_1$.

A bizonyítást két esetre bontjuk, a második bizonyítását az olvasóra bízzuk.

a) Q pont t-hez viszonyítva e egyenessel azonos sík-részen van (2. ábra).



2. ábra

b) t elválasztja Q pontot és e egyenest.

a) Feltehetjük, hogy P_1 és P_2 pont m egyeneshez viszonyítva azonos félsíkban van. Húzzunk merőlegest P_1 és P_2 pontból e egyenesre, ezek talppontja T_1 és

T_2! $T_1T_2P_2P_1$ S-négyszög, melynek alapja T_2T_1, ezért P_1 és P_2 pontnál levő szögeik egyenlők ($P_1\sphericalangle = P_2\sphericalangle$). Tartalmazásokból következik, hogy

$$QP_1P_2\sphericalangle > P_1\sphericalangle = P_2\sphericalangle > QP_2P_1\sphericalangle.$$

Ezért az előző cikk **2.1.6.** tétele alapján

$$QP_2 > QP_1,$$

amit bizonyítani akartunk.

1.3. *Adott ABC háromszög AC, illetve BC oldalának felezőpontja E, illetve F, EF egyenes C ponton átmenő távolságvonala t. A t távolság-vonal azoknak a P pontoknak halmaza, amelyre*

(3) $\quad ABP\triangle \text{ter.} = ABC\triangle \text{ter.}$

Bizonyítás; Húzzunk merőlegest az *A*, *B*, *C* pontokból *EF* egyenesére, talppontjuk legyen A_1, B_1, C_1! C_1 helyzete A_1B_1-hez viszonyítva a 3*a*), *b*), *c*) ábrákon látható. Középpontos tükrözésből következik, hogy

(4) $\quad AEA_1\triangle \simeq CEC_1\triangle,$

$$BFB_1\triangle \simeq CFC_2\triangle,$$

továbbá

(5) $\quad AA_1 = CC_1 = BB_1.$

Ezért az A_1B_1BA négyszög S-négyszög, amelynek alapja A_1B_1, továbbá

$$ABC\triangle \text{ter.} = A_1B_1BA \text{ S-négyszög ter.}$$

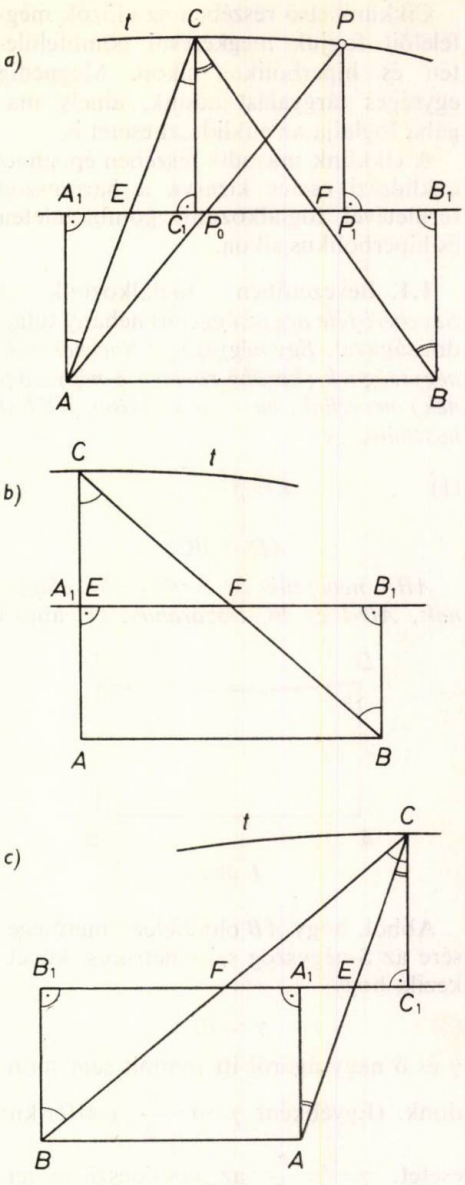
Az ábrán jelölt szögek egyenlőségéből az is következik, hogy az A_1B_1BA S-négyszögben

(6) $\quad A\sphericalangle = B\sphericalangle = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$

Legyen $P \in t$ tetszőleges! Ha bebizonyítjuk, hogy az *EF* egyenes felezi az *AP* és *BP* szakaszokat, akkor (4)-et és (5)-öt felírhatjuk az *ABP* háromszögre is, ezért

$$ABP\triangle \text{ter.} = A_1B_1BA \text{ S-négyszög ter.} =$$
$$= ABC\triangle \text{ter.}$$

EF egyenes felezi *AP* szakaszt. Legyen



3. ábra

P_0 az *AP* és *EF* metszéspontja! Tükrözzük P_0 pontra az AP_0A_1 háromszöget! (5)-ből következik, hogy *A* pont tükörképe *t* vonalon van, azaz *P* pont lesz. Ezért $AP_0 = P_0P$.

Ezzel megmutattuk, hogy a távolságvonal tetszőleges *P* pontjára teljesül (3).

Könnyen bizonyítható, hogy ha P az AB egyenese által határolt, C pontot tartalmazó félsíknak olyan pontja, amelyet t elválaszt A ponttól, akkor az ABP háromszög területe nagyobb az ABC háromszög területénél, ellenkező esetben kisebb.

A bizonyításból még a következő tételek olvashatók ki:

1.3.1. Mivel a tetszőleges ABP háromszög ($P \in t$) az A_1B_1BA S-négyszögbe darabolható, ezért (6) alapján az *ABP háromszög szögeinek összege egyenlő az ABC háromszög szögeinek összegével.* (Euklideszi esetben ez semmitmondó.) *Ha két háromszög egy oldala és területe egyenlő, akkor szögeinek összege is egyenlő.*

1.3.2. *Attól függően, hogy egy háromszög szögeinek összege π-nél kisebb, egyenlő vagy nagyobb, a hozzátartozó S-négyszög nem alapon levő szögei hegyesszögek, derékszögek, illetve tompaszögek lesznek.*

1.3.3. *A közös oldalú, egyenlő területű háromszögeknek a közös oldalhoz tartozó középvonalai egyenlők, ugyanis mindegyik az A_1B_1BA S-négyszög alapjának fele* $\left(\frac{A_1B_1}{2}\right)$.

1.3.4. *Az euklideszi síkon t egyenes és párhuzamos AB oldallal.*

1.3.5. *A gömbfelületen t körív, amely átmegy A és B pont átellenes pontjain (A'-n és B'-n).* Az irodalomban Lexell-kör néven ismert.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy pl. t vonal átmegy B pont átellenes pontján, B'-n. (6)-ból következik, hogy B és C ugyanolyan távol van az EF főkörtől, csak különböző félgömbön. B-t tükrözve a gömb középpontjára, az EF főkörtől való távolsága nem változik, viszont C ponttal azonos félgömbre kerül, azaz t-n lesz. Az egész kör nem jó, hiszen t-t az AB által határolt egyik félsíkon (félgömbön) vettük.

1.4. *Az ABC háromszög AB és AC oldala állandó (gömbfelületen $AB+AC<\pi$). Az ABC háromszög területe maximális, ha a háromszög szögeire fennáll az*

$$\alpha = \beta + \gamma \tag{7}$$

egyenlőség. A háromszög területe $\alpha<\beta+\gamma$ esetén α szigorúan monoton növekvő, $\alpha>\beta+\gamma$ esetén szigorúan monoton csökkenő függvénye.

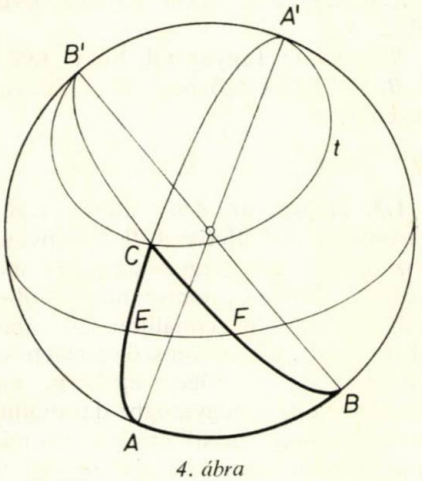
Bizonyítás: Használjuk a 3. ábra jelöléseit! Tudjuk, hogy az A_1B_1BA S-négyszögben A és B csúcsnál $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ nagyságú szög van (6).

$$\alpha \lessgtr \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \leftrightarrow \alpha \lessgtr \beta+\gamma. \tag{8}$$

Ha $\alpha<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, akkor α növelésével (AC állandó) **1.2.1.** alapján C pont távolsága nő EF-től, azaz a terület növekszik (*3a*) ábra), α csökkenésével pedig csökken a terület. A terület egyenlőség esetén lesz maximális (*3b*) ábra). Ha $\alpha>\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, akkor **1.2.1.** alapján α növelésével a terület csökken.

Megjegyzések:

Gömb esetén szükséges az $AB+AC<\pi$ feltétel. Ugyanis, ha $AB+AC>\pi=BB''$



4. ábra

(4. ábra), akkor A pont körül C pontot forgatva α növelésével a terület nő, C pont megközelítheti az $A'B'$ B pontot nem tartalmazó ívét, azaz a terület megközelíti a 2π-t (félgömb felszíne). Ha $AB+AC=BB'=\pi$, akkor is α növelésével nő az ABC gömbháromszög területe, C pont tetszőlegesen megközelítheti B' pontot, a terület pedig π-t (negyedgömb).

2. Cikkünk következő részében elsősorban a nem-euklideszi esettel foglalkozunk. Szakköri foglalkozásokon a szemlélet fejlesztése szempontjából használható.

A *Legendre*-féle **1.** szögtételből tudjuk, hogy a háromszög szögeinek összege π-nél nem nagyobb. A bizonyításnál felhasználtuk, hogy egy egyenesre egy szakaszt egymás után akárhányszor felmérhetünk. Így nyilván ez a gömbfelületre nem érvényes. A **2.** szögtétel alapján tudjuk, hogy ha egy háromszögben a szögösszeg π, akkor mindegyikben π, és ha egyben kisebb π-nél, akkor mindegyikben kisebb π-nél. Gömbfelületen jól ismert, hogy a szögösszeg π-nél nagyobb.

Mindezekből következik, hogy hiperbolikus esetben a négyszög szögeinek összege 2π-nél kisebb, szferikus esetben 2π-nél nagyobb.

2.1. *A hiperbolikus síkon és a gömbfelületen, ha két háromszög szögeinek összege egyenlő, akkor egyenlő területűek.*

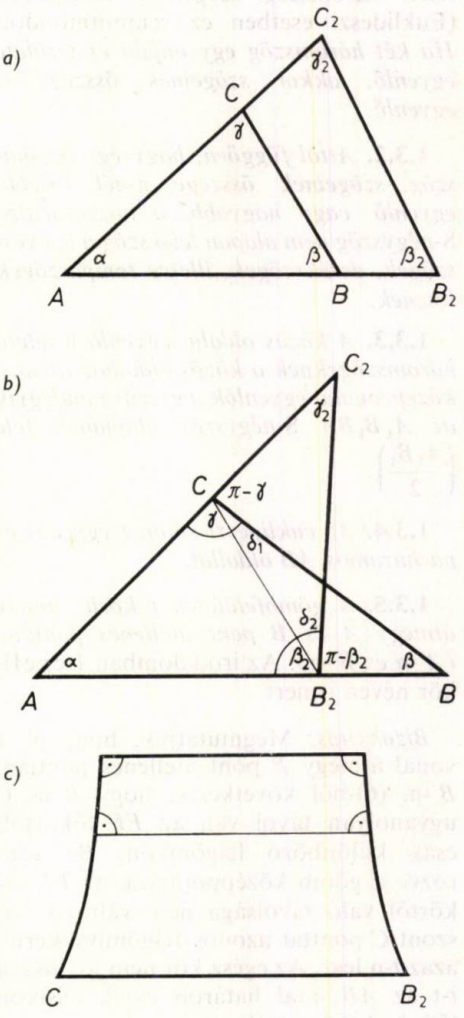
Bizonyítás: Tegyük fel, hogy ABC és $A_2B_2C_2$ háromszögben a szögösszeg egyenlő:

$$\alpha+\beta+\gamma = \alpha_2+\beta_2+\gamma_2! \tag{9}$$

1.3. alapján az ABC, illetve $A_2B_2C_2$ háromszög AB, illetve A_2B_2 középvonalhoz tartozó távolságvonalán úgy mozgatjuk C, illetve C_2 pontot, hogy $\alpha=\beta+\gamma$, illetve $\alpha_2=\beta_2+\gamma_2$ fennálljon (3*b)* ábra). Mozgásnál egyik háromszög területe sem változott és a szögösszeg sem, mert ugyanabba az S-négyszögbe darabolható az egyik, illetve másik esetben. (6) miatt a szögösszeg nem változik. (9)-ből következik, hogy ebben az esetben fennállnak az $\alpha=\alpha_2$ és $\beta+\gamma=\beta_2+\gamma_2$ egyenlőségek. Rakjuk a két háromszöget egymásra úgy, hogy α azonos legyen α_2-vel!

Nem lehet, hogy egyik háromszög tartalmazza a másikat (5.*a)* ábra), mert akkor $\beta+\gamma=\beta_2+\gamma_2$ miatt a BCC_2B_2 négyszögben a szögek összege 2π, ami hiperbolikus és szferikus esetben nem lehet.

Ezért az összerakás után csak az 5.*b)* ábra elrendezése lehetséges. Megmutat-



5. ábra

juk, hogy

$$CB_2C_2\triangle \text{ ter.} = CB_2B\triangle \text{ ter.}$$

Ebből következik a tétel állítása.

A $CB_2C_2\triangle$ szögeinek összege megegyezik a $CB_2B\triangle$ szögeinek összegével, mert

$CB_2C_2\triangle$ szögeinek összege:

$$\delta_1+\delta_2+\gamma_2+\pi-\gamma,$$

$CB_2B\triangle$ szögeinek összege:

$$\delta_1+\delta_2+\beta+\pi-\beta_2.$$

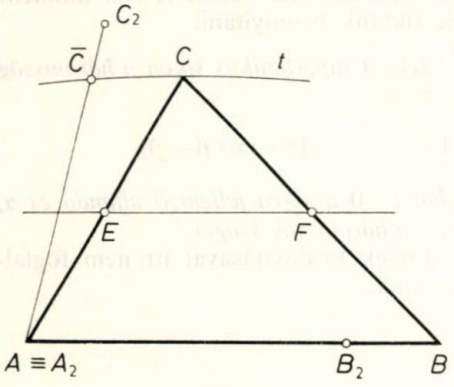
A két összeg pedig $\beta+\gamma=\beta_2+\gamma_2$ miatt valóban egyenlő.

A CB_2C_2 és a CB_2B háromszögeket **1.3.** alapján (Lásd még a 3. ábrát!) alakítsuk át S-négyszögekké, amelyeknek az alappal szemközti CB_2 oldaluk közös! Megegyezik a két S-négyszög C és B_2 csúcsnál levő szöge, ugyanis (6) alapján a háromszög szögei összegének a fele. A két S-négyszög egybeesik, mert ellenkező esetben egyik tartalmazza a másikat (5.*c)* ábra), és téglalapunk van, ami csak az euklideszi síkon lehetséges, de ezt kizártuk.

Ezzel **2.1.**-et bebizonyítottuk.

2.2. *Ha két háromszög egyenlő területű, akkor a szögek összege is egyenlő.* (Itt az euklideszi esetet sem kell kizárni, legfeljebb triviális az állítás.)

Bizonyítás: Legyen a két egyenlő területű háromszög ABC és $A_2B_2C_2$! Tegyük fel, hogy $A_2B_2\leqq AB$! Rakjuk a két háromszöget a 6. ábra szerint ($A\equiv A_2$, $B_2\in AB$)! Vegyük az ABC háromszög AB-hez tartozó középvonalának C ponton átmenő távolságvonalát!



6. ábra

Ha $B_2\equiv B$, akkor területegyenlőség miatt $C_2\in t$ (**1.3.**), azaz a szögek összege egyenlő. Ellenkező esetben t elválasztja C_2 pontot A ponttól. Legyen $\bar{C}=t\cap AC_2$! **1.3.** alapján $ABC\triangle$ ter. $=AB\bar{C}\triangle$ ter., és a két háromszög szögeinek összege is egyenlő! Kapjuk az 5.*b)* ábrának megfelelő elrendezést.

Mivel $ABC\triangle$ ter. $=AB_2C_2\triangle$ ter., ezért $CB_2C_2\triangle$ ter. $=CB_2B\triangle$ ter. A két háromszögnek CB_2 közös oldala van, és területük egyenlő, ezért **1.3.** alapján ugyanabba az S-négyszögbe darabolhatók át, tehát szögeik összege is egyenlő (6). Az 5.*b)* ábra alapján

$$\delta_1+\delta_2+\gamma_2+\pi-\gamma = \delta_1+\delta_2+\beta+\pi-\beta_2.$$

Ebből

$$\gamma_2+\beta_2 = \gamma+\beta.$$

Az átalakítások során a szögösszeg nem változott, ezért a kiindulási háromszögekben is egyenlő a szögek összege.

Megjegyzés:

A **2.1.** és **2.2.** tételek bizonyításából az is kiolvasható, hogy az egyenlő területű háromszögek hiperbolikus síkon és gömbfelületen is egymásba darabolhatók.

2.3. *Hiperbolikus síkon és gömbfelületen, ha két háromszög szögeinek összege különböző, akkor területük is különböző, és ha területük különböző, akkor szögeik összege is különböző.*

Ez egyszerű következménye a **2.1.** és **2.2.** tételeknek.

2.4. *Ha az ABC háromszög területe nagyobb az $A_2B_2C_2$ háromszög területénél, akkor hiperbolikus síkon*

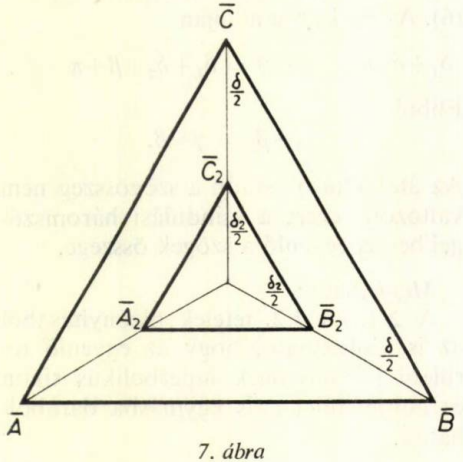
$$\alpha+\beta+\gamma < \alpha_2+\beta_2+\gamma_2, \tag{10}$$

a gömbfelületen pedig

$$\alpha+\beta+\gamma > \alpha_2+\beta_2+\gamma_2, \tag{11}$$

ahol α, β, γ, *az* ABC, α_2, β_2, γ_2 *pedig az* $A_2B_2C_2$ *háromszög szögei.*

Bizonyítás: Vegyük az $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, illetve $\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2$ szabályos háromszögeket, melyek szögei $\delta=\bar{\alpha}=\bar{\beta}=\bar{\gamma}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, $\delta_2=$ $=\bar{\alpha}_2=\bar{\beta}_2=\bar{\gamma}_2=\frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{3}$! **2.1.** tétel alapján $ABC\triangle$ ter. $=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\triangle$ ter. és $A_2B_2C_2\triangle$ ter. $=\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2\triangle$ ter. Ezért a feltétel alapján $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\triangle$ ter. $>\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2\triangle$ ter. Az első cikk (I) **2.1.2.—4.** tételek alapján a szabályos háromszögeknek 3 szimmetriatengelyük van. Rakjuk a 2 háromszöget a 7. ábra szerint! Az $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ háromszög tartalmazza az $\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2$ háromszöget. Szögei az ábra szerintiek.



7. ábra

Hiperbolikus esetben a $\bar{B}\bar{B}_2\bar{C}_2\bar{C}$ négyszög szögeinek összege

$$2\left(\pi-\frac{\delta_2}{2}\right)+2\cdot\frac{\delta}{2}<2\pi.$$

Ebből

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\delta<\delta_2=\frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{3},$$

azaz (10) teljesül.

Szferikus esetben a $\bar{B}\bar{B}_2\bar{C}_2\bar{C}$ négyszög szögeinek összege

$$2\left(\pi-\frac{\delta_2}{2}\right)+2\cdot\frac{\delta}{2}>2\pi.$$

Ebből

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\delta>\delta_2=\frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{3},$$

azaz (11) teljesül.

2.5. *A háromszög területe hiperbolikus síkon a szögösszeg szigorúan monoton csökkenő függvénye, gömbfelületen pedig szigorúan monoton növekvő függvénye.*

A bizonyítást nem részletezzük, indirekt úton a **2.1.**, **2.2.** és **2.4.** állítás alapján egyszerűen belátható.

2.6. *A gömbháromszög területe egységsugarú gömbfelületen*

$$(12)\qquad \alpha+\beta+\gamma-\pi,$$

ahol α, β, γ *a háromszög szögei.*

A bizonyítás megtalálható Hajós György: Bevezetés a geometriába című tankönyvében.

Megjegyzés:

A **2.1.—2.5.** állítások gömbfelületen a (10) formula következményei. Azonban **2.**-ban egyrészt a hiperbolikus és a gömbi geometria közti kapcsolatra akartunk rámutatni, másrészt pedig arra, hogy a (12) formula ismerete nélkül is sok mindent be tudunk bizonyítani.

2.7. *A hiperbolikus síkon a háromszög területe*

$$(13)\qquad c[\pi-(\alpha+\beta+\gamma)],$$

ahol $c>0$ *a síkra jellemző állandó és* α, β, γ *a háromszög szögei.*

Ennek bizonyításával itt nem foglalkozunk.

DR. VARECZA ÁRPÁD
főiskolai docens
Nyíregyháza

Egy versenyfeladat és a keresési problémák

Az 1980. évi Kürschák József Matematikai Verseny — amelyen legfeljebb azok vehettek részt, akik 1980-ban érettségiztek — egyik (3.) feladata a következő volt:

„Adott teniszversenyzők két csoportja: az egyik 1000, a másik 1001 versenyzőből áll. Mindegyik csoporton belül ismerjük a versenyzők erőfölényét. Adjunk meg olyan eljárást, amelynek segítségével 11 mérkőzés lejátszása után megállapítható, hogy ki a 2001 játékos közül a középső (azaz az 1001-edik)! (Feltesszük, hogy a játékosok mind különböző erősségűek, és az erősebb játékos mindig legyőzi a gyengébbet.)"

A feladattal kapcsolatosan természetszerűen vetődhet fel több probléma: mit is értünk pontosan eljáráson; 11-nél kevesebb mérkőzés nem elég-e; mit mondhatunk akkor, ha a versenyzők egyik csoportjában n, a másikban m játékos van; mit mondhatunk akkor, ha nem a középsőt, hanem mondjuk a k-adikat kívánjuk meghatározni; mit mondhatunk akkor, ha sorba kívánjuk őket rendezni stb.

A következőkben néhány felvetett problémát vizsgálunk:

Először foglalkozunk az eljárás definiálásával és megmutatjuk, hogy tulajdonképpen minimax problémával állunk szemben.

Legyen A, illetve B a játékosok két halmaza!

Legyen az első játékospár (c, d) $(c, d \in A \cup B)$, és jelölje ezt S_0. Legyen $\varepsilon_1 = 1$, ha c legyőzi d-t (a továbbiakban jelölje ezt $c > d$), és $\varepsilon_1 = 0$, ha d legyőzi c-t $(c < d)$! Az ε_1 *választól függően* választunk egy $S_1(\varepsilon_1)$ párt, mondjuk $e(\varepsilon_1)$-et és $f(\varepsilon_1)$-et, és $\varepsilon_2 = 1$, ha $e(\varepsilon_1) > f(\varepsilon_1)$ és $\varepsilon_2 = 0$, ha $e(\varepsilon_1) < f(\varepsilon_1)$. Ugyanígy folytatva bizonyos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ $\{0, 1\}$ sorozatokra megadjuk az

(1) $$S_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i)$$

párt azzal a kikötéssel, hogy ha az $S_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$ definiálva van, akkor az $S_{i-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1})$ is. Az ε_{i+1} 1 vagy 0 aszerint, hogy az (1) pár első vagy második tagja a nagyobb. A kérdéseknek így megadott halmazát (a válaszokkal együtt) az $A \cup B$ halmaz k-adik elemének meghatározására alkalmas eljárásnak (a következőkben azt mondjuk, hogy stratégiának) nevezzük (esetünkben $A = 1000$, $B = 1001$, $k = 1001$), ha minden

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l$$

sorozat esetén, amikor

(2) $$S_{l-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l-1})$$

meg van határozva, de

$$S_l(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l)$$

már nincs, akkor az

(3) $$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l$$

válaszok (az S_0, $S_1(\varepsilon_1)$, ..., $S_{l-1}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l-1})$ kérdésekkel együtt) meghatározzák az $A \cup B$ halmaz k-adik elemét.

Ha $T_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i+1})$ jelöli azt az egyenlőtlenséget, amelyet az $S_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$ párból készíthetünk az ε_{i+1} válasz alapján, akkor a (3) feltétel úgy is fogalmazható, hogy a

(4) $$T_0(\varepsilon_1), T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \ldots, T_{l-1}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l)$$

egyenlőtlenségből $A \cup B$ k-adik eleme következik. A (2) és (3) feltételeket kielégítő $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l$ sorozatra azt mondjuk, hogy erre a stratégia befejeződik.

A maximális hosszúságú $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l$ sorozat hosszát, amelyre a stratégia befejeződik, a *stratégia hosszának* nevezzük.

Jelölje a következőkben ϱ a stratégiát és $L(\varrho)$ a stratégia hosszát!

A ϱ stratégia $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$ állapotának nevezzük az $S_{i-1}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1})$ kérdésre adott válasz utáni helyzetet. Ezek után nyilvánvaló, hogy olyan stratégia keresése a probléma, amelynél a maximális hossz minimális.

Tekintsük azt az esetet, amikor $|A|=n$, $|B|=m$ és az $A \cup B$ k-adik elemének $(1 \leqq k \leqq n+m)$ meghatározása a cél! Feltehetjük, hogy $m \leqq n$.

Legyen $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, és tegyük fel, hogy

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n,$$
$$b_1 > b_2 > \ldots > b_m.$$

Ha $A \cup B$-ben meghatározzuk a k-adik elemet, akkor ennél az elemnél $k-1$ elem nagyobb és $n+m-k$ elem kisebb. A következő esetek lehetségesek:

1. $k \leqq m, n$:
   mivel a k-adik elemnél csak $k-1$ elem lehet nagyobb, ezért az a_t, b_t $(k<t)$ elemek eleve nem jönnek számításba, mivel már a saját sorukban k-nál több elem nagyobb náluk. Ezért A-ból és B-ből is az előző k elemet vehetjük, és ezek között a k-adik lesz $A \cup B$-ben is a k-adik.
2. $m<k \leqq n$:
   A-ból az $n-k$ legkisebb nem lehet k-adik, és mivel a k-adiknál $n+m-k$ kisebb van, ezért A-ból az első $n-(n+m-k+1)=k-m-1$ elem sem lehet a k-adik $A \cup B$-ben. Ezért A-ból $n-(n-k)-(k-m-1)=m+1$ elemet kell csak tekintenünk és e közül az $m+1$ A-beli és a B elemei közül kell meghatározni az $(m+1)$-edik elemet: ez lesz $A \cup B$-ben a k-adik elem.
3. $m, n<k$:
   mivel a k-adik elemnél kisebbek száma $n+m-k$, ezért A-ból és B-ből is csak az $n+m-k+1$ legkisebb elem lehet a k-adik $A \cup B$-ben. E közül az $n+m-k+1$ legkisebb A-, illetve B-beli elemből kiválasztjuk az $(n+m-k+1)$-edik elemet, és ez az elem lesz $A \cup B$-ben a k-adik.

Ezek szerint tetszőleges k-adik elem meghatározása visszavezethető vagy az $|A|=|B|$, vagy az $|A|=|B|+1$ esetek vizsgálatára, ahol az $|A|$-adik elemet kell meghatározni. Tekintsük az $|A|=|B|+1$ esetet! (A második hasonlóan intézhető el.)

Ebben az esetben A és B bármely eleme lehet középső elem $A \cup B$-ben (szokás ezt „mediáns"-nak nevezni). Ha $|A|=n+1$, akkor egy összehasonlítás eredményeként legfeljebb $\left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor$ elemről derülhet ki, hogy nem lehet középső, ezért a további vizsgálatokhoz $\left\lceil \frac{2n+1}{2} \right\rceil$ elem marad. ($\lceil x \rceil$ jelöli az x-nél nem kisebb, legkisebb egész számot, $\lfloor x \rfloor$ jelöli az x-nél nem nagyobb, legnagyobb egész számot.)

Ebből következik, hogy ha a ϱ stratégia az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l$ válaszsorozatra befejeződik, akkor teljesül a

$$\frac{2n+1}{2^l} \leqq \left\lceil \ldots \left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{2n+1}{2} \right\rceil \right\rceil \ldots \right\rceil \leqq 1$$

egyenlőtlenség, amiből

$$2n+1 \leqq 2^l \quad \text{és} \quad \lceil \log_2 (2n+1) \rceil \leqq l,$$

mivel l egész.

Ez azt jelenti, hogy bármely stratégiát választunk is, a középső elem meghatározásához legalább $\lceil \log_2 (2n+1) \rceil$ összehasonlítást kell végeznünk.

Mivel $\lceil \log_2 2001 \rceil = 11$, ezért a feladat egy optimális stratégiát kér.

Könnyen adható ilyen stratégia.

Legyen $S_0 = (b_{500}, a_{501})$!

Ha $\varepsilon_1 = 1$, akkor a $b_1, b_2, \ldots, b_{500}$ elemek 1000-nél több elemnél nagyobbak, az $a_{502}, a_{503}, \ldots, a_{1001}$ elemek 1000-nél több elemnél kisebbek, ezért a következőkben csak a $b_{501}, \ldots, b_{1000}, a_1, \ldots, a_{501}$ elemeket kell vizsgálat tárgyává tennünk.

Ha $\varepsilon_1 = 0$, akkor az előzőhöz hasonló meggondolással adódik, hogy az $a_1, \ldots, a_{501}, b_{501}, \ldots, b_{1000}$ elemek esnek ki, és így csak az $a_{502}, \ldots, a_{1001}, b_1, \ldots, b_{500}$ elemeket kell tekintenünk a következőkben. Nyilván kedvezőtlenebb az az eset, amikor B-ből 500, A-ból 501 elem marad. Az eljárást folytatva 11 összehasonlítás után megkapjuk az 1001-edik elemet.

A stratégia tetszőleges n-re is alkalmazható.

Néhány megoldatlan és megoldott problémára hívjuk fel a figyelmet a következőkben:

Ha $|A| = n+1$, $|B| = n$, és nemcsak a középső elemet kívánjuk meghatározni, hanem sorba kívánjuk rendezni $A \cup B$ elemeit, akkor ehhez legalább $2n$ összehasonlítást kell végeznünk. Tetszőleges A, B-re a probléma még nyitott (néhány speciális eset elintézett).

Az sem ismert, hogy mennyi játékot kell legalább játszanunk, ha adott — mondjuk — n játékos, és nem ismerjük a játékosok erő-sorrendjét és a középső játékost akarjuk meghatározni. (Néhány kisebb n-re az állítás megoldott: pl. $n=5$ esetben 6 játékkal meghatározható a 3. játékos, de kevesebbel nem.)

[1], [5], [6]-ban olyan stratégiák szerepelnek, amelyek $22n$ összehasonlítással elvégzik feladatukat. [7]-ben olyan — eléggé bonyolult — stratégiát találunk, amelyik $\sim 3n$ lépéssel határozza meg a középső elemet. Ez eddig a legjobb. Azt is tudjuk ([8]), hogy a középső elem kiválasztásához legalább $1{,}75n$ összehasonlítást kell végeznünk.

Az érdeklődő olvasók a felsorolt irodalomban, de főleg [5]-ben több — a tárgyalthoz hasonló — megoldott, illetőleg még nyitott problémát találhatnak.

IRODALOM

[1] LOVÁSZ L.—GÁCS P.: *Algoritmusok.* Műszaki könyvkiadó, Bp. 1978.

[2] B. A. TRAHTENBROT: *Algoritmusok és absztrakt automaták.* Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1978.

[3] R. G. BUSACKER—T. L. SPATY: *Véges gráfok és hálózatok.* Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1969.

[4] G. D. H. KATONA: *Combinatorial search problems.* *A Survey of Combinatorial search problems.* Ed. by J. N. Srivastava, North Holland (1973) 285—308.

[5] D. E. KNUTH: *„The art of computer programming."* vol. 3. Sorting and Searching. Addison—Wesley 1975.

[6] VARECZA Á.: *Módszerek a rendezési algoritmusok elvi korlátainak meghatározására.* Alk. Mat. Lapok (1980) 191—202.

[7] SCHÖNHAGE, A.—PATERSON, M.—PIPPENGER, N.: *"Finding the Median".* Theory of Comp. Report No. 6 (1975) Univ. of Warwick.

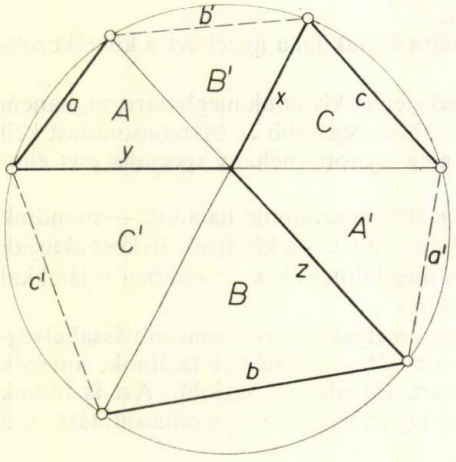
[8] PRATT, V.—YAO, F.: *"On lower bounds for computing the i-th largest element".* Proc. 14th Ann. IEEE Symp. on Switching and Automata Theory, (1973) 70—81.

DR. KÁRTESZI FERENC
ny. egyetemi tanár
Budapest

A szabályos tizenkétszög egy érdekes tulajdonsága

Az alábbiakban bemutatunk egyet a szabályos tizenkétszög számos szép tulajdonsága közül. Azt állítjuk ugyanis, hogy a szabályos tizenkétszögnek van olyan nyolc csúcsa, amelyek által kifeszített konvex nyolcszög főátlói (az átellenes csúcsokat összekötő szakaszok) egy pontban találkoznak.

Ennek az állításnak a bizonyítását egyszerűvé teszi a következő, önmagában is érdekes *lemma:*



1. ábra

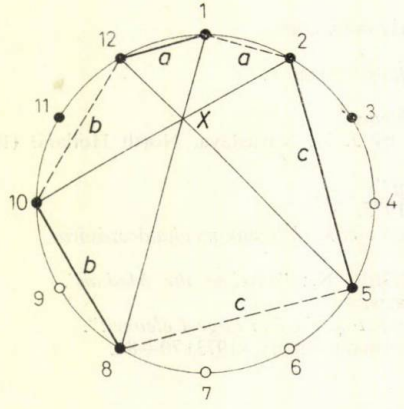
Körbe írt konvex hatszög három, páronként nem szomszédos oldalának szorzata akkor és csak akkor egyenlő a másik három oldal szorzatával, ha a hatszög főátlói egy pontban találkoznak.

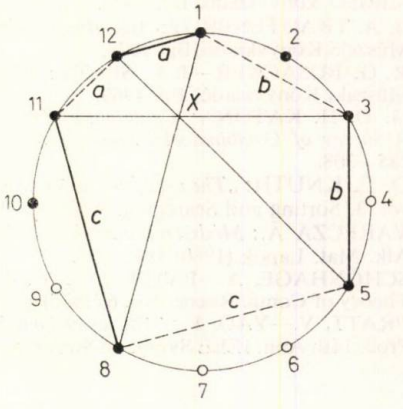
1. ábránkon olyan, körbe írt konvex hatszöget tüntetünk fel, amelynek főátlói egy ponton mennek keresztül. A hatszög részháromszögei közül az átellenesek hasonlók egymáshoz, mert szögeik páronként egyenlők. Ebből következik, hogy

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{c'},\quad \frac{y}{z}=\frac{a}{a'},\quad \frac{z}{x}=\frac{b}{b'},$$

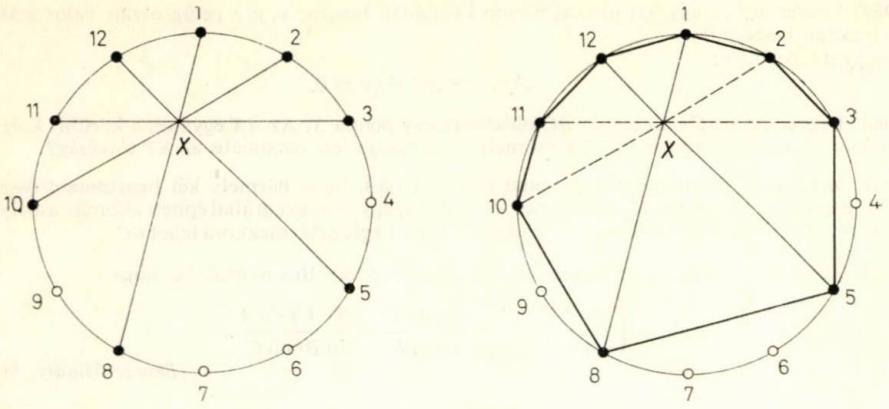
ahonnan $abc=a'\,b'\,c'$.

Ennek az állításnak a megfordítását indirekt módon bizonyíthatjuk. Magának a bizonyításnak az elvégzését az olvasóra bízzuk.





2a), b) ábra



2c), d). ábra

A 2. *a)* ábra $\langle 1, 3, 5, 8, 11, 12\rangle$ hatszögében teljesül az oldalak szorzatára vonatkozó, előbb tárgyalt egyenlőség, ezért

$$\langle 1, 8\rangle \cap \langle 5, 12\rangle = X \in \langle 3, 11\rangle.$$

Hasonlóan a 2. *b)* ábra $\langle 1, 2, 5, 8, 10, 12\rangle$ hatszögében

$$\langle 1, 8\rangle \cap \langle 5, 12\rangle = X \in \langle 2, 10\rangle.$$

A 2. *c)* ábra együttesen tartalmazza az előző kettőnek a főátlóit.

Ebből látható, hogy az $\langle 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 12\rangle$ nyolcszög főátlói az X pontban metszik egymást (2. *d)* ábra).

A fentiekben említett lemma alkalmazására tág lehetőség kínálkozik: már doktori értekezést is írtak belőle.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10.; 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

957. Melyik az a nyolcjegyű négyzetszám, amelyben az első négy és az utolsó négy jegyből álló négyjegyű szám egymás utáni egészek?

958. Bizonyítsuk be: ha egy kör középpontjának koordinátái közül legalább az egyik irracionális, akkor legfeljebb két racionális koordinátájú pont van a körön!

959. Legyen a, b, c egy háromszög három oldalának hossza; x, y, z pedig olyan valós számok, amelyeknek összege 0.
Bizonyítsuk be, hogy:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy \leqq 0.$$

960. Legyen az ABC háromszög BC oldalának egy pontja X. Az AX egyenes a körülírt kört másodjára az Y pontban metszi. Az X pont mely választására lesz maximális az XY távolság?

961. m hegycsúcson n üzem úgy épített sílift-állomást, hogy bármely két hegycsúcsot összeköt sílift, de csak egy irányban; továbbá nincs $k+1$ olyan, egyazon üzem által épített állomás, amelyeket az egy irányú liftekkel egymás után fel lehetne keresni. Legfeljebb mekkora lehet m?

962. Legyenek A, B, C egy hegyesszögű háromszög szögei! Bizonyítsuk be, hogy

$$\ln\left(\frac{\sin A}{\sin C}\right)^2 \geqq \frac{(A-B)\sin C}{\sin A \cdot \sin B}+\frac{(B-C)\sin A}{\sin B \cdot \sin C}.$$

Bencze Mihály, Brassó

FELHÍVJUK

lapunk igen tisztelt Olvasóinak figyelmét

Az eredményesebb középiskolai matematikaoktatásért című kiadványra, amely az Országos Pedagógiai Intézet gondozásában 1977-ben jelent meg a Pedagógus továbbképzés könyvtára sorozatban.

A kötet az alábbi szerzők következő cikkeit tartalmazza:

Dr. Szendrei János: *A matematikaoktatás korszerűsítéséről.*

Dr. Urbán János: *Világnézeti nevelés a középiskolai matematikaórákon.*

Dr. Welker Ottó: *Teljesítménymérés a középiskolában.*

Dr. Pintér Lajosné: *Néhány feladat egyes logikai fogalmak gyakorlására a matematikaórán.*

Dr. Varecza Árpád: *A szükséges, az elegendő, valamint a szükséges és elegendő feltétel.*

Bereznai Gyula: *Az egyenletek ekvivalenciája.*

Kőváry Károly: *Mértani helyek.*

Papp Ferenc: *Három feladat az érintősokszögek szerkesztésére.*

Hajnal Imre: *Néhány trigonometriai feladatról.*

Csuri József: *Néhány feladat valószínűségszámítási jelentése.*

Dr. Andrásfai Béla: *A gráfelmélet elemei, tekintettel a kombinatorika alapfogalmainak kialakítására is.*

Dr. Jékel Pál: *A számítástechnika elemei.*

A kiadvány célját címe fejezi ki. A középiskolai új tantervek bevezetése növeli a kötet időszerűségét. Korlátozott példányszámban még megvásárolható vagy megrendelhető a következő címen: Kondás Barna osztályvezető-helyettes. Országos Pedagógiai Intézet. Budapest, Gorkij fasor 17—21.; 1071.

A kötet ára: 45 Ft.

Varecza Árpád

Tanárképző főiskolák matematikaversenyei, I. 1952—70.

A tanárképző főiskolák matematikaversenyei 1952-ben kezdődtek. Sorozatunk bevezető kötete az első 10 év versenyfeladatait és ezek megoldásait tartalmazza. A feladatok nagy részében több, egymástól különböző elvi felépítésű megoldást közöl a szerző, aki a nyíregyházi tanárképző főiskola tanáraként aktív résztvevője a versenybizottságnak. A következő kötet, amely az 1971—80. évi versenyek feladatait tartalmazza, később bocsátjuk az olvasó rendelkezésére. (8164/I.)

Sain Márton

Matematikatörténeti ABC

(Adatok, tények, érdekességek a matematika középfokú tanításához és tanulásához.)

A kötet gyűjteményes formában tartalmazza a matematika sok kiváló művelőjének életrajzát, több tucatnyi matematikai fogalom és tétel kialakulásának, felfedezésének a történetét. A kulturális téren jelentős szerepet vitt népeknél (pl. az araboknál, egyiptomiaknál) a matematika fejlődését külön összefoglaló részekben tekinti át.

E részek, de a matematika egy-egy területének történeti áttekintését nyújtó olyan fejezetek is, mint az aritmetika, algebra vagy a geometria történetével foglalkozók, rendszerint az időszámítás előtti évszázadokra nyúlnak vissza.

A lexikális adatokat gyakran színezik a könyvben az érdeklődés fokozására alkalmas történeti érdekességek. Az életrajzokat arcképek, a történelmi hátteret térképvázlatok és összehasonlító táblázatok illusztrálják. Az anyagban való gyors és könnyű tájékozódást segíti a lexikonszerűen kialakított címszavak ábécé sorrendje. (52 659)

Hámori Miklós

Halmazok. Matematikai logika

A halmazok fogalmának megalkotása a dolgok viszonyának, kapcsolatainak pontos megismeréséhez, a logika a helyes gondolkodás törvényeinek feltárásához vezet. A könyv célja, hogy ezeknek, a ma már tudományokká fejlődött ismereteknek az alapjából néhány gondolatot megvillantson.

A szerző könnyed, játékos, érdekes szövegű példák segítségével, a tanulók színvonalának megfelelően, érthető nyelvezettel tárgyalja az anyagot. Elsősorban az általános iskola 7. és 8. osztályosainak és a középiskola I-II. osztályosainak ajánljuk. (1991)

Hámori Miklós

Ismerkedés a komputerrel

A komputerekre vonatkozó ismeretek új és komplex tudományok alapjait vetették meg. Ezek robbanásszerű fejlődésének vagyunk tanúi napjainkban. A könyv szinte játszva vezeti be az olvasót a komputerek világába. Olyan ismeretanyagot ad, amelyre — a fejlődés irányát és lehetőségeit is tekintetbe véve — könnyen és jól lehet építeni. Megismertet az információ fogalmával; egyszerű és világos példákon mutatja be a jel, a kód, kódolás fogalmait, a számolás technikájának fejlődését. Bevezet többek között az algoritmus, a folyamatábra, a ciklus fogalomkörébe. Egy fiktív gép segítségével konkrét programozási ismereteket ad. A szerző a legnehezebb fogalmakat is egyszerű, játékos példák, az élet nyújtotta hasonlatok segítségével vezeti be. Ajánljuk az általános iskolák felső osztályosainak, a középiskolások minden korosztályának, de a nagyközönségnek is. (29 205)

5,50 Ft

Javasolt szakirodalom a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Munkaközösség: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (8178) 29,50

Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 6.* (83 020) ..... 39,—

M. Bartal—Pálfalviné: *Tankönyvi útmutató a gimnáziumi II. osztályos matematika munkatankönyvhöz* (84 070) ..... 7,—

Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematika-oktatásához (52 681) ..... 16,—

Bartal—Jakab—Kántorné: *Ismerkedés a kísérleteinkkel.* Új utak a matematika tanításában (52 522/4) 29,50

Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991) ..... 9,—

Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50

Hámori Miklós: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) ..... 10,—

Kovács Győző: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217) 12,50

Máté László: *Sorozatok, sorok* (29 243) ..... 12,—

Vigassy Lajos: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben* (29 247) 9,50

Bognárné—Nemetz—Tusnády: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253) ..... 17,—

Péter Rózsa: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak* (52 489) ..... 31,—

Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC* (52 659) ..... 35,—

Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) ..... 18,—

Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 347/2) ..... 6,—

Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) 13,—

Korányi Erzsébet: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) ... 18,50

Felvételi feladatok: matematika, fizika, szabadkézi rajz. Szerkesztette: Pálfai Pál (8159) 108,—

Dr. Scharnitzky Viktor: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából,* 1974—1976. IV. kötet (8158/IV.) 18,50

Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—

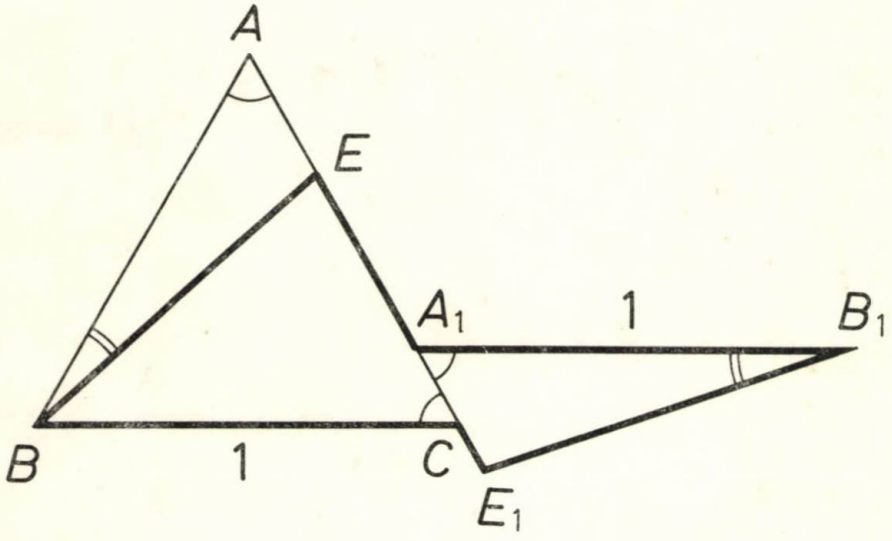
Magyar Felsőoktatási Intézmények Tájékoztatója (93 141) ..... 55,—

Beszerezhetők
a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 4. Könyvesboltban (1051 Bp., Október 6. u. 8.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



VEGYIPARI KÖNYVTÁR

1981. június * XXVIII. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200
81-1407 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Novák Lászlóné: Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1980. évi Vetélkedőjének országos fordulójáról 65
Hajnal Imre—Dr. Pintér Lajos: A fakultatív „B" tanterv III. osztályos könyvéről 72
Dr. Laczkovich Miklós—Dr. Simonovits Miklós: Analitikus függvények a középiskolában. II. 76
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: Eszperantista matematikusok budapesti találkozója . 86
„Matematikatanárok versenyé"-nek 1980. évi díjazottjai 89

FELADATOK 89

СОДЕРЖАНИЕ

Новак Ласлоне: Отчет о всевенгерском туре Викторины пионеров-математиков вг. 1980 65
Хайнал Имре—д-р Пинтер Лайош: Об учебнике для 3 класса, составленном по факультативной программе «Б» .. 72
д-р Лацкович Миклош—д-р Шимонович Миклош: Аналитические функции в средней школе (часть II) 76
д-р Береньи Жужанна Агнеш: Встреча математиков-эсперантистов в Будапеште 86
Призеры конкурса учителей математики 1980 года 89

ЗАДАЧИ 89

INHALT

Frau Borbála Novák (geb.: *Kapczár*): Bericht über die Landesrunde des Wettstreits der Pionier-Mathematiker im Jahre 1980 65
Hajnal, Imre—Dr. Pintér, Lajos: Über das Lehrbuch für die III. Klasse auf Grund der Variante „B" des fakultativen Lehrplans 72
Dr. Laczkovich, Miklós—Dr. Simonovits, Miklós: Analytische Funktionen in der Mittelschule. II. 76
Frl. Dr. Zsuzsanna Ágnes Berényi: Zusammenkunft der Esperantisten Mathematiker in Budapest 86
Die Prämiierten des „Wettbewerbes für Mathematiklehrer" im Jahre 1980. 89

AUFGABEN 89

NOVÁK LÁSZLÓNÉ
osztályvezető-helyettes
Országos Pedagógiai Intézet

Beszámoló az Úttörő-matematikusok 1980. évi Vetélkedőjének országos fordulójáról

Az 1979—80. tanévben ismét sor került az úttörő-matematikusok vetélkedőjére. A vetélkedőt a Magyar Úttörőszövetség, az Oktatásügyi Minisztérium, az Országos Pedagógiai Intézet és a Bolyai János Matematikai Társulat közösen hirdette meg 7. és 8. osztályosok számára. A vetélkedő célja a pajtások matematikai érdeklődésének felkeltése, illetve fokozása, és a felkészülés során a tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése, a matematikai tehetségek gondozása.

A csapatversenyben, a járási és megyei fordulókon sikeresen szereplők közül 100 hetedikes és 100 nyolcadikos pajtás juthatott az országos döntőbe. Az országos fordulóra Csillebércen került sor az egyéb úttörővetélkedőkkel, szemlékkel egyidőben. A nagy létszám miatt két nap tartott a verseny. Az első napi eredmény alapján 35 hetedikes és 31 nyolcadikos került a döntőbe, akik között második napon dőlt el a sorrend.

A feladatok és megoldásuk

(A leírt megoldásmódok a legeredményesebben szereplő pajtások gondolatait tartalmazzák.)

7. osztály

Az első napi feladatok

1. Jelentsen az a is és a b is egy-egy számjegyet! A $62a75b$ alakú, 18-cal osztható számok közül melyik a legnagyobb és melyik a legkisebb?

Megoldás:

A 18-cal osztható számok oszthatók 9-cel és párosak. Az ismert négy számjegy összege 20, ezért $a+b$ vagy 7, vagy 16 lehet, és b páros szám.
A lehetőségeket táblázatba foglalhatjuk:

b	0	2	4	6	8
a	7	5	3	1	8

Ezért a $62a75b$ alakú szám ötféleképpen egészíthető ki 18-cal osztható számmá. Ezek közül legnagyobb a 628 758; legkisebb a 621 756.
A hibátlan és helyesen indokolt megoldásért 8 pontot adtunk. A 100 pajtás közül 13-an adtak elfogadható teljes megoldást. A jó eredményt adók közül 14-en csak 7 pontot, 6-an 6 pontot kaptak, mert nem megfelelően indokoltak.
A 100 tanuló együttes eredménye: 42%.

2. Vásárlás alkalmával Andris a 16 Ft 40 filléres számlát 10 pénzérmével fizette ki. A fizetésre átadott pénzérmék között 5 forintos, 2 forintos, 50 filléres és 20 filléres lehetett. Hány darab érmét adhatott Andris az egyes fajtákból?

Megoldás:

A megoldásokat próbálgatással — túl sok—túl kevés módszerrel — találták meg a gyerekek, és ezt a versenybizottság elfogadta. Andris négyféleképpen fizethette ki a 16,40 Ft-ot. Az átadott pénzérmék száma lehetett:

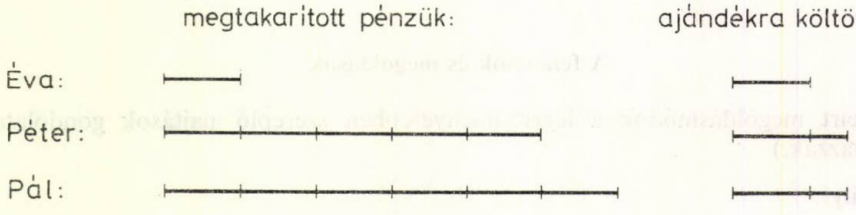
1. megoldás: 3 db 5 Ft-os és 7 db 20 filléres;
2. megoldás: 1 db 5 Ft-os, 5 db 2 Ft-os, 2 db 50 filléres és 2 db 20 filléres;
3. megoldás: 2 db 5 Ft-os, 2 db 2 Ft-os, 4 db 50 filléres és 2 db 20 filléres;
4. megoldás: 8 db 2 Ft-os és 2 db 20 filléres.

A négy megoldásért 8 pontot adtunk. Ha valaki még azt is igazolta, hogy ennél több megoldás miért nem lehet, az még +2 pontot kaphatott. 33-an találták meg a 4 megoldást, ezek közül 7-en + pontot is kaptak. Az együttes teljesítmény: 67%.

3. Péter ötször, Pál hatszor annyi pénzt gyűjtött, mint Éva. Édesanyjuk születésnapjára Péter a megtakarított pénze 30%-áért, Pál 25%-áért vett ajándékot, Éva pedig az összes megtakarított pénzét erre költötte. Mennyi volt a megtakarított pénzük, és mennyit költöttek el külön-külön a gyerekek, ha tudjuk, hogy hárman együtt 180 Ft-ot adtak ki?

Megoldás:

A feladatban szereplő mennyiségeket szakaszokkal ábrázolhatjuk:



Péter $(5 \cdot 0{,}3 =)$ 1,5-szer annyit adott ajándékra, mint Éva; Pál szintén $(6 \cdot 0{,}25 =)$ 1,5-szer annyit. Ezért az ajándékra költött 180 Ft Éva pénzének $(1+1{,}5+1{,}5 =)$ négyszerese. Évának 45 Ft-ja, Péternek 225 Ft-ja, Pálnak 270 Ft-ja volt, és Éva 45 Ft-ot, Péter és Pál egyaránt 67,50 Ft-ot költött ajándékra.

A feladat helyes megoldásáért 6 pontot adtunk. 45-en oldották meg hibátlanul. Az együttes teljesítmény 74%.

4. Két számról a következőket tudjuk:
— ha a nagyobb számot elosztjuk a kisebbel, akkor hányadosul 3-at, maradékul 10-et kapunk;
— az osztandó, az osztó, a hányados és a maradék összege 191. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

Legyen az osztó a, akkor az osztandó $3a+10$ alakban írható fel. $(3a+10)+a+$ $+3+10=191$; $a=42$.

Az osztó 42, az osztandó 136.

A feladat helyes megoldásáért 6 pontot adtunk. 32-en oldották meg hibátlanul a feladatot. Az együttes teljesítmény 68%.

5. Szerkessz háromszöget, amelynek AC oldala 4 cm, BC oldala 6 cm és a C csúcsot az AB oldal felezőpontjával összekötő szakasz (CC') szintén 4 cm hosszú!

Megoldás:

Először paralelogrammát szerkesztünk 4 cm és 6 cm oldalakkal és 8 cm-es átlóval. Ha ezt a nem 8 cm-es átlója mentén felezzük, megkapjuk a keresett háromszöget. A feladat megoldásáért 8 pontot adtunk. Ezzel a feladattal birkóztak meg a gyerekek a legnehezebben. Csak 15-en oldották meg hibátlanul. Az együttes teljesítmény 17%.

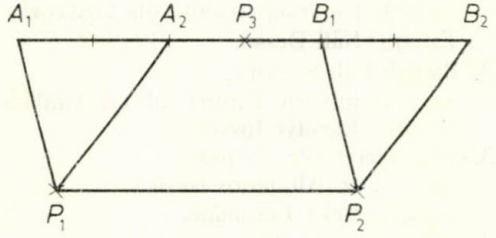
A második napi feladatok

1. Az iskolai pingpongbajnokság után Anna, Bea, Cili, Dóri és Eszter így nyilatkozott:
Anna: Dóri a második lett, sajnos én csak a harmadik lettem.
Bea: Első lettem, Cili pedig a második.
Cili: Harmadik lettem, szegény Beának csak az utolsó hely jutott.
Dóri: Második lettem, Eszter lecsúszott a negyedik helyre.
Eszter: Negyedik lettem, de jó Annának, ő lett az első!
Utólag kiderült, hogy mindegyik lánynak csak az egyik állítása igaz. Állítsd össze a verseny helyezési listáját!
A helyes okoskodás eredménye:
1. Dóra; 2. Cili; 3. Anna; 4. Eszter; 5. Bea.
A helyes sorrendért 10 pontot adtunk. A 35 tanulóból 16-an hibátlanul oldották meg. Az együttes teljesítmény: 76%.

2. Az adott három pont közül kettő egy paralelogramma két szomszédos csúcsa, a harmadik pont pedig a csúcsokkal megadott oldallal párhuzamos oldal egyik negyedelő pontja. Szerkeszd meg a paralelogrammát! Keresd meg az összes megoldást!

Megoldás:

Az adott három pont közül bármelyik kettő lehet a paralelogramma két szomszédos csúcsa. Például P_1 és P_2 kiválasztásakor P_3 pont kétféleképpen is lehet egy paralelogramma negyedelő pontja. Ezért a feladatnak 6 megoldása van. Az ábra most csak kettőnek mutatja a szerkesztését.



A feladat teljes és helyes megoldásáért 12 pontot adtunk. Hibátlanul megoldotta 15 pajtás. Az együttes teljesítmény: 78%.

3. Vízbe merítve a vörösrezet 11%-kal, a cinket 14%-kal kisebb erővel kell tartani, mint a levegőben. Mennyi rezet és mennyi cinket tartalmaz az a 240 Newton súlyú sárgaréz (vörösréz és cink ötvözete) tárgy, amelyet ha vízbe merítünk, 210 Newton erővel tarthatunk meg?

Megoldás:

Ha a vörösréz súlya x Newton, akkor a cink súlya $(240-x)$ Newton, és az összefüggések alapján a következő egyenlet írható fel: $0{,}89x+0{,}86(240-x)=210$. Ebből $x=120$. A 240 Newton sárgaréz tárgy 120 Newton vörösrezet és 120 Newton cinket tartalmaz.

A feladat megoldásáért 6 pontot adtunk. A hibátlanul megoldók száma 22. Az együttes teljesítmény: 63%.

4. A tengeren léket kapott egy hajó, de csak 1 óra múlva vették észre. Ezalatt már 3 m^3 víz befolyt. Ekkor beállítottak két szivattyút, az egyik egy óra alatt 2 m^3, a másik 3 m^3 vizet szivattyúz ki. Mennyi idő alatt tudják kiszivattyúzni az összes vizet, ha a szivattyúzás ideje alatt is ugyanolyan gyorsan folyik be a víz, mint előtte?

   Megoldás:

   A két szivattyú óránként 2 m^3-rel több vizet szivattyúz ki, mint amennyi óránként a léken befolyik. Ezért a már hajóban levő 3 m^3 és a közben befolyó vizet 1,5 óra alatt szivattyúzhatják ki. A feladatmegoldásért 6 pontot adtunk. Hibátlanul megoldotta 23 pajtás. Az együttes teljesítmény 66%.

5. Egy kocka mindegyik csúcsából levágunk egy háromszög alapú gúlát úgy, hogy a csúcsba futó három él felezőpontján át egy síkot fektetünk. Hány százaléka a maradék test térfogata az eredeti kocka térfogatának?

   Megoldás:

   Ha a kocka éle a, akkor egy gúla térfogata $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} : 6 = \frac{a^3}{48}$. A hat gúla térfogata $\frac{a^3}{48} \cdot 6 = \frac{a^3}{8}$. Ez az a élű kocka térfogatának 12,5%-a. A maradék test térfogata tehát 87,5%.
   A helyes megoldásért 16 pontot adtunk. 12-en hibátlanul oldották meg. Az együttes teljesítmény 44%.

A verseny első 6 helyezettje:

1. **Megyesi Gábor.** 50+2 pont.
   Szeged, Tanárképző Főiskola Gyakorló Általános Iskola.
   Tanára: **Süli Dezső.**
2. **Balogh Pál.** 50 pont.
   Százhalombatta, Damjanich úti Általános Iskola.
   Tanára: **Károlyi József.**
3. **Tölcsvári Attila.** 48 pont.
   Eger, 1. sz. Általános Iskola.
   Tanára: **Béky Lorándné.**
4. **Zakar Sándor.** 47 pont.
   Tamási, Általános Iskola.
   Tanára: **Ulrik Magdolna.**
5. **Viertl Béla.** 45 pont.
   Győr, Kossuth Lajos Általános Iskola.
   Tanára: **Horváth Gézáné.**
6. **Diczházi Csaba.** 44 pont.
   Budaörs, Esze Tamás Általános Iskola.
   Tanára: **Peleskei Miklós Pál.**

8. osztály

Az első napi feladatok

1. Megegyezik a 7-esek első feladatával. 20 pajtás oldotta meg hibátlanul. Az együttes teljesítmény 45%.

2. Ha egy tört számlálójához hozzáadunk 6-ot és a nevezőjét felére csökkentjük, akkor 1-et kapunk. Ha viszont a számlálót csökkentjük a felére és a nevezőből elveszünk 6-ot, akkor $\frac{1}{6}$-ot kapunk. Melyik ez a tört?

Megoldás:

Legyen a keresett tört számlálója x és a nevezője y. A feladatban szereplő összefüggések alapján a következő egyenletek írhatók fel:

$x+6=\frac{y}{2}$ és $6\cdot\frac{x}{2}=y-6$. Ebből $2x+12=3x+6$; $x=6$. A tört $\frac{6}{24}$. Hibátlanul megoldotta 25 tanuló. Az együttes eredmény 34%.

3. Egy paralelogramma alapú hasábba a lehető legnagyobb térfogatú kúpot állítjuk. A hasábról a következőket tudjuk:
— alaplapjának egyik oldala 9 cm;
— egyik átlója 12 cm;
— ez a két szakasz merőleges egymásra.
Mindkét test magassága 30 cm.
Számítsd ki, hogy a kúp térfogata hány százaléka a hasáb térfogatának!

Megoldás:

A kúp sugarát szerkesztéssel vagy Pitagorasz tételével és hasonlóság alkalmazásával kaphatták meg a tanulók. A paralelogramma másik oldala 15 cm, az ehhez az oldalhoz tartozó magasság, vagyis a kúp átmérője 7,2 cm.

A hasáb térfogata: $9\cdot 12\cdot 30\,\text{cm}^3=1080\,\text{cm}^3$. A kúp térfogata: $\frac{3{,}6^2\cdot 3{,}14\cdot 30}{3}\,\text{cm}^3\approx$ $\approx 407\,\text{cm}^3$, és ez a hasáb térfogatának megközelítőleg 12,6%-a.
A feladat teljes és jó megoldásáért 9 pontot adtunk. Meglepően sokan, 33-an oldották meg helyesen. Az együttes teljesítmény 68%.

4. Egy kiránduló csoport — folyó mentén — csónakot bérelt 5 óra időtartamra. A víz sebessége 3 km/óra, a csónak sebessége 7,5 km/óra lenne állóvízben. Milyen messzire távolodhatnak el a folyón a kikötőhelytől, ha 5 óra alatt vissza is akarnak érni?

Megoldás:

A keresett távolságot nevezzük x-nek, akkor a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\frac{x}{4{,}5}+\frac{x}{10{,}5}=5;\quad \text{ebből}\quad x=15{,}75.$$

Tehát a kiránduló csoportnak 15,75 km megtétele után vissza kell fordulni. A feladatot jól megoldók 6 pontot kaptak. 55 ilyen pajtás volt. Az együttes teljesítmény 81%.

5. Szerkessz egy 6 cm oldalú szabályos háromszöget; majd szerkessz egy 4 cm oldalú másik szabályos háromszöget, amelynek csúcsai rajta vannak a 6 cm oldalú háromszög oldalain!

Megoldás:

Úgy szerkesszük meg a két háromszöget, hogy közös legyen a köréjük húzható kör középpontja, majd a középpont körül forgassuk el a belső háromszöget, amíg a csúcsok a külső háromszög oldalaira esnek! A feladat megoldásáért 6 pontot adtunk. Csak 8-an jöttek rá a megoldásra. Együttes teljesítmény 28%.

A második napi feladatok

1. Megegyezik a hetedikesek 1. feladatával. 13-an oldották meg hibátlanul. Az együttes teljesítmény 80%.

2. Az adott B' és C' pont egy háromszög két oldalának felezőpontja: az adott T pont a harmadik oldalhoz tartozó magasság talppontja. Szerkeszd meg a háromszöget!

Megoldás:

A $B'C'$ szakasz a háromszög egyik középvonala, ezért fele a BC oldalnak és azzal párhuzamos. A T pontból $B'C'$ szakaszra húzott merőleges egyenesen lesz rajta a háromszög A csúcsa, a $B'C'$ szakasztól akkora távolságra, mint amekkora távolságra van a T pont a $B'C'$ szakasztól. A helyes megoldásért 8 pontot adtunk. 15-en oldották meg hibátlanul. Az együttes teljesítmény 48%.

3. Ha elosztjuk az 1997-et egy háromjegyű számmal, akkor maradékul 17-et kapunk. Ha a 3496-ot osztjuk el ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor maradékul 31-et kapunk. Melyik számmal osztottuk el az adott számokat?

Megoldás:

(1977—17) és (3496—31) legnagyobb közös osztója lesz a feladat megoldása, és ez a 495. 11-en kapták meg a maximális 10 pontot, az együttes teljesítmény 35%.

4. Egy kert felásását két ember közül az egyik 4 óra alatt, a másik 4,5 óra alatt végezné el. A munka sürgőssége miatt mindkét ember változtatott a teljesítményén, és ketten együtt másfél óra alatt felásták a kertet úgy, hogy mindkettő ugyanakkora területet ásott fel. Hányszorosára növelte a teljesítményét az egyik és hányszorosára növelte a másik?

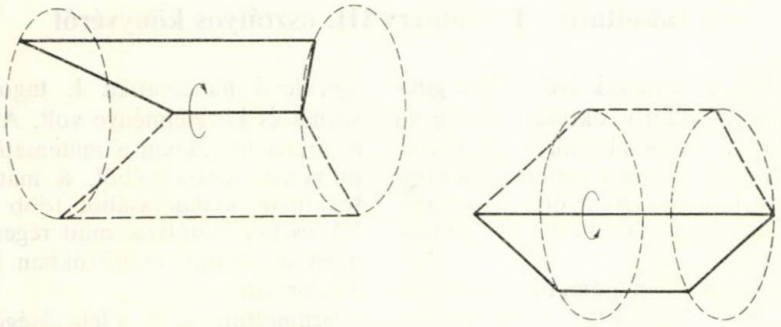
Megoldás:

Az egyik ember 1 óra alatt a kert $\frac{1}{4}$ részét, 1,5 óra alatt a $\frac{3}{8}$ részét ássa fel, ha nem növeli a teljesítményét. A kert $\frac{1}{2}$ része a $\frac{3}{8}$ résznek $\frac{4}{3}$-szorosa, ezért a teljesítményét is $\frac{4}{3}$-szorosára kellett növelni. A másik ember teljesítménye hasonló okoskodás alapján a $\frac{3}{2}$-szeresére nő. A hibátlan megoldásért 6 pontot adtunk. Jól oldotta meg 12 tanuló. Az együttes teljesítmény 39%.

5. Egy trapézt megforgatunk egyszer a rövidebb, egyszer a hosszabb párhuzamos oldalegyenese körül. Melyik esetben lesz a keletkezett test térfogata nagyobb? Lehet a két térfogat egyenlő?

Megoldás:

A hosszabb párhuzamos oldal körül forgatva a trapézt, egy hengert és két kúpot kapunk. A rövidebb párhuzamos oldal körül forgatva szintén egy hengert kapunk és két olyan „horpadt" hengert, amelyből az előbb kapott két kúp hiányzik.



Mivel a kúp csak $\frac{1}{3}$ része a vele egyenlő alapterületű és magasságú henger térfogatának, ezért az utóbbi esetben, a trapéz rövidebb oldala körüli forgatásakor keletkezett test térfogata a nagyobb. Mivel itt különböző alapú a trapéz, ezért most a keletkezett két forgástest térfogata nem lehet egyenlő. A helyes és elfogadhatóan indokolt megoldásért 16 pontot adtunk. 7-en kapták meg a maximumot. Az együttes teljesítmény 23%.

A verseny első 7 helyezettje:

1. **Erdős László.** 50+9 pont.
   Budapest, Kiscelli úti Általános Iskola.
   Tanára: **Waigond Zsuzsa.**
2. **Győrffi Anikó.** 47 pont.
   Szentes, Köztársaság téri Általános Iskola.
   Tanára: **Dancsó János.**
3. **Szabó Ádám.** 44 pont.
   Debrecen, KLTE Gyakorló Általános Iskola.
   Tanára: **Nagy Ferencné.**
4. **Cservenyák Ildikó.** 43 pont.
   Eger, 2. sz. Gyakorló Általános Iskola.
5. **Várnai Péter.** 42 pont.
   Tapolca, 2. sz. Általános Iskola.
   Tanára: **Jávor Antalné.**
6. **Gángó Gábor.** 42 pont.
   Székesfehérvár, Rákóczi Ferenc Általános Iskola.
   Tanára: **Láng Hugó.**
7. **Nagy Péter.** 42 pont.
   Szentes, Köztársaság téri Általános Iskola.
   Tanára: **Dancsó János.**

HAJNAL IMRE—DR. PINTÉR LAJOS
középiskolai szakfelügyelő
egyetemi docens
Szeged

A fakultatív „B" tanterv III. osztályos könyvéről

1981-ben a harmadik évébe lép a gimnáziumok fakultatív oktatási rendje és új tanterve. Szeptembertől a gimnáziumok III. osztályában a matematika tanítása heti 3 órás, heti 5 órás fakultatív „A" és heti 7 órás fakultatív „B" tanterv szerint folyik.

A III. osztályos matematika-tankönyv írására 1977. áprilisában a Tankönyvkiadó Vállalat pályázatot hirdetett. Az Oktatásügyi Minisztérium és a Tankönyvkiadó Vállalat hivatalosan felkért, hogy vegyünk részt a pályázaton.

A pályázat eredménye alapján a tankönyvírásra is felkérést kaptunk. Kezdetben III. osztályos tankönyv írásáról volt szó; a 3, 5 és 7 órás tantervek külön-külön tankönyvrendszere később alakult ki. Mi megbízást a „B" változat tankönyvének írására kaptunk.

1978-ban jelent meg az OPI által összeállított és az Oktatásügyi Minisztérium által jóváhagyott fakultatív „B" változat kísérleti tanterve. A Tankönyvkiadó Vállalattal kötött szerződés alapján könyvünket ennek előírásai szerint kellett elkészítenünk. (Más tanterv a mai napig — 1981. februárjáig — sem jutott a kezünkhöz.)

Tankönyvünk tervezésénél figyelembe vettük mindazokat a változásokat, amelyeket az új oktatási rend és az új tanterv jelent. Magyarországon hasonló oktatási rend még nem volt, ehhez pedagógiai tapasztalataink nincsenek, ezért az előrelátható gondok számbavétele fontos.

A „B" változat négy évi óraszáma kevesebb, előírt törzsanyaga és követelménye viszont több, mint a megszűnő-ben levő matematika I. tagozat óraszáma és követelménye volt. A jövőben a gimnáziumokban a matematikai gondolkodás fejlesztéséből, a matematikai fogalmak kialakításából több hárul a III. és IV. osztályra, mint régen, hiszen most az alsóbb osztályokban kisebb a heti óraszám.

Számoltunk azzal a lehetőséggel, hogy a tanulók több második osztályból kerülnek egy csoportba, előzőleg több tanár tanítványai voltak, az is lehetséges, hogy nem mindannyian ugyanazt a tankönyvet használták. Megtörténhet, hogy a fakultatív tantervi anyagot tanító tanár a III. osztályos tanítványai közül korábban senkit sem ismert. Ezért tankönyvünk első felében — ahol az lehetséges volt — ismétlő fejezeteket iktattunk a könyvbe. Ezeknek mind didaktikai, mind szakmai szempontból nagy jelentőséget tulajdonítunk. A tanult anyag ismétlése, rendszerezése, összetett feladatok megoldása elősegíti a fogalom- és jelölésrendszer tisztázását, az igényesebb munkamódszer kialakítását.

A tankönyv fejezetei között módszerbeli különbség is van. Tudjuk, hogy a tanév kezdetén még nincs kialakulva a matematikában igényesebb gondolkodás. Ezért a tankönyv első fejezetei kissé részletesebbek, mint a későbbiek, de minden fejezetnél számítunk és építünk az aktív tanári munkára.

Az új fogalmak, új ismeretek bevezetésénél a motiváció részletes (esetleg hosszadalmas) kimunkálását akadályozta könyvünk megszabott terjedelme. Azt is tekintetbe vettük, hogy a megfelelő

motivációt a tananyag, továbbá a tanulók érdeklődési köre és értelmi fejlettsége együttesen határozza meg. Az anyag motivációjának megválasztásában és kidolgozásában a csoportot ismerő szaktanárnak döntő szerepe van. Ez az alkotó szakdidaktikai munka hozzátartozik a tanári hivatáshoz.

Az előírt anyag adott terjedelmű tömör kidolgozása mellett kevés hely maradt feladatok kitűzésére. Mintaként sok példát mutatunk be, az új anyagrészekhez közlünk feladatokat, de nagyon gyakran utalunk a „Geometriai feladatok gyűjteménye" és a „Matematikai feladatgyűjtemény" köteteire. Ezekből óráról órára nagy számban kell kitűzni feladatokat. Nagyon sok gyakorlásra van szükség, hiszen egy-egy óra új anyagához kapcsolódó feladatok csak az első órán újak, a következőkben ezekre újabb ismeretek épülnek, az előző órák anyagai régivé válnak. Ahhoz, hogy a tárgyalt ismeretekre építhessünk, azok szilárd tudását kell biztosítanunk.

A tankönyvíró számára a tanterv koncepciója és előírt tananyaga kötelező, a tananyag csoportosításában azonban szabad keze van.

A kísérleti fakultatív tanterv a III. osztályban törzsanyagnak írja elő a valós kitevőjű hatvány definícióját, a követelmények között a valós kitevőjű hatvány definíciójának és tulajdonságainak ismeretét. Ez azzal jár, hogy a régi tankönyvek megszokott tárgyalási sorrendjét módosítanunk kellett. A hatvány, gyök, logaritmus című fejezet csak a sorozatok, sorozatok határértékének tárgyalása, a Cantor-féle axióma után következhet.

A III. osztályos anyag fő fejezeteinek felsorolását a kísérleti tanterv a trigonometria alkalmazásaival és a koordinátageometriával kezdte. A tanterv koncepciója bennünket is arra kötelezett. Így tankönyvünk fő fejezetei: A trigonometria alkalmazásai — Koordinátageometria — Sorozatok — Hatvány, gyök, logaritmus — Folytonos függvények — A derivált — Kiegészítő fejezetek — A lineáris algebra elemei — Kombinatorika — A matematikai logikáról.

A valószínűségszámítás elemei című fejezet megírására — a Tankönyvkiadó Vállalat szerkesztőségével együtt—dr. Nemetz Tibort kértük fel.

A tanterv nyomán tankönyvünk is sok új vonást tartalmaz. Ezért indokoltnak érezzük az egyes fejezetek rövid, előzetes ismertetését.

1. A fakultatív csoportok munkájának kezdetén a II. osztály anyagához kapcsolódó *trigonometriai* fejezet a tanultak összehangolására és az igényesebb munkamódszer kialakítására kiválóan alkalmas.

A tankönyv első — kb. 8 oldalas — fejezete alapján mintegy 7 órára terjedő rendszerező ismétléssel számolunk. Utána új ismeret következik: Két vektor skaláris szorzatának fogalma, tulajdonságai és néhány alkalmazása. Ez alapvető fontosságú anyagrész. (Tantervi bevezetése matematikaoktatásunk korszerűsítésének nagyon indokolt és jól előkészített lépése.) Tárgyalása csak látszólag többletmunka, a bevezetésre fordított 2—3 óra bőven megtérül a cosinustételnél, az addíciós tételeknél, az (xy) síkbeli egyenes egyenletének felírásánál, két egyenes hajlásszögének megállapításánál, pont és egyenes távolságának kiszámításánál, szögfelező egyenesek egyenletének felírásánál stb.

A sinus- és cosinustétel alkalmazásánál vezetjük be a folyamatábrákat. A fejezet végén a közelítő számítások néhány alapvető fogalmának értelmezése után egyetlen példán megmutatjuk a kerekített értékekkel való számolást és a kerekítés következményeit. (Külön számítástechnikai fejezet nincs a tankönyvben.)

2. A *koordináta-geometriai* fejezetet a térbeli és síkbeli párhuzamos tárgyalás, valamint a törzsanyag és a kiegészítő anyag figyelembevételével tagoltunk.

A fejezet kezdetén vezetjük be a térbeli Descartes-féle koordináta-rendszert,

és műveleteket végzünk koordinátáikkal adott vektorokkal. Szakasz osztópontjának meghatározását helyvektorokkal oldjuk meg, majd vektorok koordinátáival műveleteket végezve jutunk el az osztópont térbeli, illetve síkbeli koordinátáihoz.

Önálló fejezetben vezetjük be az egyenes irányvektorának; az (xy) síkban az egyenes normálvektorának és iránytangensének fogalmát. Ezután három különböző fejezetben tárgyaljuk az egyenes egyenletalakjait. Az elsőben irányvektor segítségével térben (és síkban) is felírjuk az egyenes paraméteres vektoregyenletét, illetve paraméteres egyenletrendszerét azoknak, akik a kiegészítő anyagot is tárgyalják. Ettől független a törzsanyagot tárgyaló következő két rész: az (xy) sík egyeneseinek normálvektorral, illetve iránytangenssel felírt egyenletalakja.

A tantervi anyag korszerűsítésével együtt jár a követelmények korszerűsödése is. Így a skaláris szorzás ismeretében pont és egyenes távolságát egyszer, általánosan határozzuk meg, a későbbiekben ezt az eredményt használjuk fel. (Ez már a Geometriai feladatok gyűjteményében is szerepel: a II. kötet 752. feladata.)

3. Az analízis tanításában nagy súlyt helyezünk a *sorozatokra*. Ezt azért is tesszük, mert azt tapasztaltuk, hogy a tanítás során ez nagyon sok tanuló számára előnyös. A folytonosság, differenciálhatóság fogalmának megértésében a sorozatok nagy segítségükre lehetnek. (Ez nem jelenti azt, hogy pl. folytonosságnál csak a sorozatos definíciót használnánk.)

A sorozatokat a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvénynek tekintjük. Néhány sorozat felírása, sorozatok megadása után következik a teljes indukció módszere. Igyekeztünk változatos példákat kidolgozni, egyenlőtlenség, oszthatóság, mérlegelés, geometriai feladatok mellett a szokásos összegek; halmaz részhalmazainak a száma és színezési probléma is szerepel. A kitűzött feladatok között vannak olyanok is, melyeknél megfogalmaztuk a bizonyítandó állítást, olyanok is, melyeknél először valamilyen sejtésre van szükség és annak helyességét vagy helytelenségét kell teljes indukcióval bizonyítani.

A teljes indukciót — megfelelő alkalom esetén — a könyv további fejezeteiben természetes módszerként használjuk.

A sorozatok korlátosságának és monotonságának értelmezése után súlyt helyezünk arra, hogy az olvasó figyelmét felhívjuk arra, hogy azt is pontosan tudni kell, hogy mit jelent az, hogy egy sorozat nem korlátos, nem monoton. Erre igyekszünk a tankönyv más részeinél is gondot fordítani. [Némi töprengés után monoton növekvő (fogyó), monoton nemcsökkenő (nemnövekvő) sorozatokról beszélünk. Nem használjuk a szigorúan növő (fogyó) elnevezést.]

A nevezetes sorozatok között a számtani, a mértani és a Fibonacci-féle sorozattal foglalkozunk.

Ezek után következik a sorozatok konvergenciájának fogalma. Néhány egyszerűbb bevezető példában azt vizsgáljuk, hogy ezekhez található-e olyan szám, melyhez a sorozat tagjai „közel" vannak. Ezt azután pontosítjuk. Azt a definíciót használjuk, mely véleményünk szerint a legmegszokottabb: Az a számot az (a_n) sorozat határértékének nevezzük, ha bármely $\varepsilon>0$ számhoz található olyan N szám, hogy ha $n>N$, akkor $|a_n-a|<\varepsilon$. Az olyan sorozatokat, amelyeknek van határértéke, konvergenseknek nevezzük. Az $a_n\to a$ és $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ jelöléseket használjuk. A definíció szokatlan és nehéz a tanulók számára. A tankönyvben azonban sok példában, majd a folytonosságnál, függvény határértékénél, differenciálhányadosnál kis eltéréssel ugyanez vagy hasonló fordul elő. Így arra számítunk, hogy a tanulók mind jobban és jobban megértik, hogy miről van szó, és — nem formálisan — egyre jobban tudják majd alkalmazni ezt a definíciót.

Vizsgáljuk konvergens sorozatok különböző tulajdonságait. Kimondjuk, használjuk, de nem bizonyítjuk, hogy korlátos, monoton sorozat konvergens.

A tankönyvben a Cantor-axiómát a következő alakban vesszük: Ha az $([a_n, b_n])$ zárt intervallumokból álló sorozat rendelkezik a következő két tulajdonsággal: *a)* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, ha $n=1, 2, \ldots$, *b)* $b_n - a_n \to 0$, akkor az intervallumoknak van közös pontja.

4. A *hatvány, gyök, logaritmus* című fejezet kezdetén a hatványozásról és a négyzetgyökvonásról tanultakat röviden áttekintjük, majd értelmezzük az n-edik gyököt. Az azonosságok tárgyalása után az $\sqrt[n]{x}$ függvénnyel, az $\sqrt[n]{a}$ sorozattal foglalkozunk. Itt tárgyaljuk a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget. Ezt felhasználjuk néhány szélsőérték-feladat és az $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ sorozat vizsgálatára is. Ezután értelmezzük a törtkitevőjű hatványokat, majd megmutatjuk, hogy a racionális számok halmazán értelmezett 2^x függvény monoton.

Az irracionális kitevőjű hatvány fogalmának bevezetését 2 hatványainak segítségével mutatjuk meg. Az értelmezés alapgondolata az, hogy a valós számok halmazán értelmezett 2^x függvény monoton legyen. A definícióban a Cantor-axiómát használjuk fel. Ezek után az α irracionális számhoz értelmezett 2^α számokról bizonyítjuk, hogy eleget tesznek a hatványozás azonosságainak. (Ezzel teljesítettük a kísérleti tanterv előírásait. Azonban kérdésesnek tartjuk, hogy középiskolában indokolt-e ez az igényes tárgyalás.)

Az exponenciális függvényekkel, exponenciális egyenletekkel, majd a logaritmussal való foglalkozás már megszokott anyagrészeket jelent.

5. A folytonosság fogalma megelőzi a tankönyvben a függvény határértékének fogalmát. Ezt azért gondoltuk így, mert tapasztalataink alapján a folytonosság fogalma szemléletesebb, közelebb áll a tanulóhoz. Azon is gondolkoztunk, hogy az intervallumon *folytonos függvényekkel* kezdenénk. Ez nagyon csábító és szemléletes, hisz csak azt kellene pontosan megfogalmazni, hogy ha két pont „közel" van, akkor a megfelelő függvényértékek is közel vannak. Végül azonban mégis a pontbeli folytonosság mellett maradtunk. Itt példáink alapján is talán kézenfekvőbb lett volna egy adott pontban a függvény nem-folytonosságát definiálni. Itt is a hagyományos mellett maradtunk. Kimondjuk viszont és használjuk a sorozatos és környezetes definíciót is. (Az ekvivalenciát nem igazoljuk a tankönyvben.)

6. A *differenciálhatóságot* a következő módon értelmezzük: Az f: $(a, b) \to \mathbf{R}$ függvényt az $x_0 \in (a, b)$ pontban differenciálhatónak nevezzük, ha létezik a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték. Ezt a határértéket nevezzük a függvény x_0 pontbeli deriváltjának vagy differenciálhányadosának, és így jelöljük: $f'(x_0)$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Itt jegyezzük meg, hogy a függvényekkel való foglalkozásban általában a hagyományos jelölést használjuk. A függvénnyel együtt — hacsak az nem nyilvánvaló — az értelmezési tartományt feltüntetjük. Általában f függvényről beszélünk, $f(x)$ az f-nek az x pontban felvett értékét jelenti. Így például azt mondjuk, hogy a sin függvény minden x pontban differenciálható, de azt is mondjuk, hogy pl. a $(2x^2+1)^{10}$ minden x pontban differenciálható, amin azt értjük, hogy az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=(2x^2+1)^{10}$ függvény minden $x \in \mathbf{R}$ pontban differenciálható. Fölöslegesnek tartjuk ezt minden esetben külön részletesen kiírni. Így azt érezzük, hogy nem vezet félreértésre pl. ez a cím: Az $\sqrt[n]{x}$ függvény differenciálása.

7. A *kiegészítő fejezetekben* az exponenciális és logaritmus függvény deriváltja is szerepel.

Itt említjük meg, hogy nem idegenkedünk heurisztikus bizonyításoktól, de természetesen nem tekintjük őket precíz bizonyításnak.

8. A *lineáris algebrai* részben több különböző példa után foglalkozunk a mátrixokkal, velük kapcsolatos műveletekkel. Tárgyaljuk lineáris egyenletrendszereknek az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésének módszerével való megoldását, lineáris egyenletrendszerek és mátrixok kapcsolatát. Végül néhány egyszerű lineáris programozási feladatot veszünk.

9. A *kombinatorikáról* szóló fejezetben a bevezető példák után tárgyaljuk ugyan a permutációkat, kombinációkat, variációkat, de példáinkat természetesen soha nem akarjuk valahova „beskatulyázni". Azt gondoljuk, hogy azért a tanulóknak segítséget jelent ez az igazán nem könnyű kombinatorikai feladatokban.

Részletesen foglalkozunk a skatulya elvvel, amit számos probléma megoldásánál alkalmazunk. A skatulya elvet a következő módon mondjuk ki: Ha $n+1$ darab tárgyat n skatulyába helyezünk el, akkor legalább egyik skatulyába legalább két tárgy kerül.

A következő általánosabb alakot is használjuk: Ha $n \cdot k+1$ darab tárgyat helyezünk n skatulyába, akkor legalább egyik skatulyába legalább $k+1$ tárgy kerül.

Bebizonyítjuk a binomiális tételt, és foglalkozunk a Pascal-háromszöggel.

A néhány gráfelméleti alapfogalomról szóló pontban inkább csak példák vannak. Néhány fogalmat — út, vonal, kör, fa stb. — azért bevezetünk és ezeket példákkal illusztráljuk.

10. A tanterv néhány logikai fogalmát egy fejezetben külön tárgyaljuk. Nem akarunk sokat foglalkozni a logikával, ezt a fejezet címe is mutatja: „*A matematikai logikáról*". A hangsúlyt a logikai műveletekre, azok helyes értelmezésére, a helyes kifejezések használatára helyezzük.

A tankönyv új anyagot tartalmazó részében azt tartottuk szem előtt — amit a tanterv is előír —, hogy a fogalmak helyes kialakítása nagyon fontos. A tanulóknak észre kell venniök, hogy bizonyos kérdések tisztázása, bizonyos ismeretek megszerzése új fogalmak kialakítását kívánja.

DR. LACZKOVICH MIKLÓS — egyetemi adjunktus, ELTE, Budapest
DR. SIMONOVITS MIKLÓS — egyetemi docens, ELTE, Budapest

Analitikus függvények a középiskolában. II.

Bevezetés

Ez a cikk az előző számban megjelent, azonos című cikkünk folytatása. Itt is az ott kitűzött célunkhoz tartjuk magunkat:

„A cikk célja egy olyan analízisbeli anyag bemutatása, mely összekapcsol négy dolgot:

a) hatványsorok, függvények Taylor-sorfejtése;
b) függvényegyenletek, függvények jellemzése függvényegyenletekkel;
c) függvények jellemzése differenciálegyenletekkel;
d) fizikai folyamatok leírása differenciálegyenletekkel."

Az előző cikkben elsősorban az exponenciális függvényt vettük célba, ezen folytatás fő témája a trigonometrikus függvények, pontosabban a $\sin x$ és $\cos x$. Kiindulunk a harmonikus rezgőmozgást leíró

$$y''(x) = -k^2 y(x), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0 \tag{13}$$

differenciálegyenletből, és megmutatjuk, hogy ennek egész függvény megoldása csak az

$$y(x) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ky)^{2n}}{(2n)!} \tag{14}$$

függvény lehet. Ennek deriváltja

$$y'(x) = Ak \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ky)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{15}$$

A cikk vezérgondolata az, hogy $\cos x$ és $\sin x$ *úgy is definiálható,* mint a (14) és (15) alatti hatványsorok által meghatározott függvény $A=1$, $k=1$ esetben. Bevezetjük a

$$\begin{aligned} C(x) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}, \\ S(x) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned} \tag{16}$$

függvénypárt, majd bebizonyítjuk, hogy ezek a függvények éppen régi jó ismerőseink: $C(x)=\cos x$ és $S(x)=\sin x$, ha x-et radiánban mérjük. Ez a bizonyítás több lépésből fog állni. Megmutatjuk, hogy $S(x)$, $C(x)$ valóban egész függvények. Ezután bebizonyítjuk az alábbi két tételt.

7. tétel: A (16) alatti hatványsorokkal definiált $S(x)$ és $C(x)$ eleget tesznek a

$$\begin{aligned} s(x+y) &= s(x)c(y)+c(x)s(y), \\ c(x+y) &= c(x)c(y)-s(x)s(y), \end{aligned} \tag{17}$$

és a

$$s(-x) = -s(x), \quad c(-x) = c(x) \tag{18}$$

függvényegyenleteknek, valamint a

$$s(0) = 0, \quad c(0) = 1 \tag{19}$$

kezdetiérték-feltételeknek.

8. tétel: Tegyük fel, hogy az $s(x)$, $c(x)$ és az $\tilde{s}(x)$, $\tilde{c}(x)$ függvények folytonosak 0-ban, eleget tesznek a (17), (18) és (19) feltételeknek, továbbá, hogy $\tilde{s}(x) \not\equiv 0$. Ekkor van olyan q valós szám, hogy $s(x) \equiv \tilde{s}(qx)$ és $c(x) \equiv \tilde{c}(qx)$.

Mivel a $\sin x$ és $\cos x$ függvényekről tudjuk, hogy folytonosak és kielégítik (17)—(19) feltételeket, ezért az előző tételek alapján $S(x)=\sin qx$, $C(x)=\cos qx$. Mivel pedig $S'(0)=\sin'(0)=1$, ezért $q=1$, azaz $S(x)=\sin x$ és $C(x)=\cos x$.

A 7. és 8. tételek bizonyításában nem fogunk trigonometrikus függvényeket használni, így $S(x)$, $C(x)$ alkalmasak azok definiálására.

A (13) differenciálegyenlet egész függvény megoldásai

Tegyük fel, hogy $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergens $(-\infty, \infty)$-ben és eleget tesz a (13) differenciálegyenletnek. Mivel szabad tagonként kétszer differenciálni, kapjuk, hogy

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = -k^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -k^2 a_n x^n.$$

Az együtthatóknak is meg kell egyezniük, a 4. tétel miatt. x^{n-2} együtthatója

$$n(n-1)a_n = -k^2 a_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{20}$$

Tehát páros n-re, $n=2m$-re

$$a_n = \frac{-k^2}{n(n-1)} \cdot a_{n-2} = \frac{(-k^2)^2}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot a_{n-4} =$$
$$= \frac{(-k^2)^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \cdot a_{n-6} = \ldots = \frac{(-k^2)^m}{n!} \cdot a_0, \tag{21}$$

és hasonlóan, páratlan n-re, $n=2m+1$-re

$$a_n = \frac{(-1)^m k^{2m}}{(2m+1)!} \cdot a_1. \tag{22}$$

Innen

$$y(x) = a_0 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m} x^{2m}}{(2m)!} + \frac{a_1}{k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m+1} x^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{23}$$

Bevezetve az

$$C(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad \text{és} \quad S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

függvényeket, adódik, hogy

$$y(x) = a_0 \cdot C(kx) + \frac{a_1}{k} \cdot S(kx). \tag{24}$$

Ilyenkor

$$y'(x) = -a_0 k \cdot S(kx) + a_1 \cdot C(kx), \tag{25}$$

mert, mint ahogyan azt tagonkénti deriválással ellenőrizhetjük,

$$S'(x) = C(x) \quad \text{és} \quad C'(x) = -S(x). \tag{26}$$

Ez az általános megoldása az $y''=-k^2 y$ differenciálegyenletnek, de (13)-ban mi kezdőfeltételekkel indultunk, ezért a_0 és a_1 meghatározható. Mielőtt ezt megtennénk, oldjuk meg az alábbi feladatokat!

15. feladat: Bizonyítandó, hogy az $S(x)$ és $C(x)$ függvényeket definiáló hatványsorok egész függvények (azaz mindenütt konvergensek). (Lemásolható a (9) hatványsor konvergenciájának bizonyítása.)

16. feladat: Mutassuk meg, hogy ha $f(x):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ahol a hatványsor konvergens egy $(-R, R)$ intervallumban, akkor $f(x)$ akkor és csak akkor páros függvény (azaz $f(-x)\equiv f(x)$), ha minden páratlan n-re $a_n=0$! Mutassuk meg, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor páratlan (azaz $f(-x)\equiv -f(x)$), ha minden páros n-re $a_n=0$. Végül mutassuk meg, hogy $f(x)$ függvény akkor és csak akkor páros, ha $f'(x)$ páratlan és $f(x)$ akkor és csak akkor páratlan, ha $f'(x)$ páros és $f(0)=0$.

A feladatok megoldása után rögtön világos, hogy $S(x)$ függvény páratlan és $C(x)$ függvény páros, továbbá, hogy $S(0)=0$ és $C(0)=1$. Ezért a 7. tétel bizonyításából „csak" (17) hiányzik. Mielőtt azonban a 7. tételt bebizonyítanánk, meghatározzuk a fenti differenciálegyenlet megoldásában a_0-t és a_1-et. Helyettesítsünk (24)-be 0-t: $y(0)=a_0\cdot C(0)+\frac{a_1}{k}\cdot S(0)=a_0$, másrészt $y(0)=A$ (13)-ból, vagyis $a_0=A$. Másrészt, ha (25)-be helyettesítünk 0-t, akkor $0=a_1\cdot C(0)=a_1$ adódik, azaz (13) megoldása

$$y(x) = A\cdot C(kx), \tag{27}$$

amiből (25), illetve (26) alapján

$$y'(x) = -A\cdot k\cdot S(kx) \quad \text{és} \quad y''(x) = -Ak^2\cdot C(kx). \tag{28}$$

Ebből az is látható, hogy a (27) alatti megoldás valóban kielégíti (13)-at.

A függvényegyenlet igazolása

A következő feladatunk a függvényegyenlet fennállásának igazolása vagy a 7. tétel bizonyítása. Erre két természetes út kínálkozik: az egyik kissé kellemetlenebb.

17. feladat: Ahogyan az $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ igazolásánál is megtehettük, hogy összeszoroztuk a megfelelő hatványsorokat, illetve $(x+y)^n$-t binomiális sorba fejtettük, majd ellenőriztük, hogy mindkét oldalon ugyanazok a $c_{k,l}x^k y^l$ alakú tagok szerepelnek, itt is megtehetjük ezt. Tegyük is meg!

A második út sem új: megmutatjuk, hogy a differenciálegyenletből következik a függvényegyenlet.

9. tétel: Ha $s(x)$ és $c(x)$ függvények differenciálhatóak, kielégítik a (19) kezdeti feltételekkel a (26) differenciálegyenlet-rendszert, akkor kielégítik a

$$\begin{aligned} s(x-t) &= s(x)c(t)-c(x)s(t),\\ c(x-t) &= c(x)c(t)+s(x)s(t) \end{aligned} \tag{29}$$

függvényegyenleteket is.

Megjegyzés. A (29) összefüggések tulajdonképpen a trigonometrikus függvényekre vonatkozó minden információt tartalmaznak. Ha például $x=t=0$-t helyettesítünk (29)-be, akkor $s(0)=0$ és $c(0)=c^2(0)$ adódik. Innen vagy $c(0)=0$ vagy $c(0)=1$. Ha $s(0)=c(0)=0$, akkor $s(x)\equiv c(x)\equiv 0$; írjunk ugyanis $t=0$-t (29)-be. Ezt az esetet, mint érdektelent, kizárhatjuk, tehát $s(0)=0$ és $c(0)=1$. Ekkor (29)-be $t=x$-et írva kapjuk, hogy

$$c^2(x)+s^2(x) \equiv 1 \quad (= c(0)). \tag{30}$$

Ha most (29) függvényegyenletekben x helyébe írunk 0-t, akkor éppen (18) függvényegyenleteket kapjuk vissza: s páratlan és c páros voltát. Ha pedig t helyébe $-y$-t írunk, megkapjuk (17)-et. Ezzel szemben (17) és (19) még nem tartalmaz minden információt: (17)-et és (19)-et az $e^{ax}\sin kx$ és $e^{ax}\cos kx$ függvénypár is kielégíti.

18. feladat: Gondoljuk át a fenti megjegyzés állításait és azt, hogy (17), (18) és (19) ekvivalensek (29)-cel (kizárva az azonosan 0 megoldást).

A 9. tétel bizonyítása. Az alapötlet itt is ugyanaz, mint az exponenciális függvény függvényegyenleténél: bevezetünk egy alkalmas segédfüggvénypárt: legyen x rögzített, t változó és

$$\begin{aligned} U(t) &= s(x-t)-\big(s(x)c(t)-c(x)s(t)\big) \quad \text{és} \\ V(t) &= c(x-t)-\big(c(x)c(t)+s(x)s(t)\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Ha igaz sejtésünk, azaz (26)-ból és (19)-ből következik (29), akkor $U(t)\equiv 0$ és $V(t)\equiv 0$, tehát $U'(t)\equiv 0$, $V'(t)\equiv 0$ is következik. Ezen keresztül szeretnénk megfogni a sejtésünket.

Tegyük fel tehát (26)-ot és (19)-et, vezessük be $U(t)$-t és $V(t)$-t, és képezzük deriváltjaikat t szerint, *x-et rögzítettnek tekintve!*

$$\begin{aligned} U'(t) &= -s'(x-t)-\big(s(x)c'(t)-c(x)s'(t)\big), \\ V'(t) &= -c'(x-t)-\big(c(x)c'(t)+s(x)s'(t)\big). \end{aligned}$$

Felhasználva (26)-ot:

$$\begin{aligned} U'(t) &= -\big(c(x-t)-(s(x)s(t)+c(x)c(t))\big) = -V(t), \\ V'(t) &= \big(s(x-t)-(-c(x)s(t)+s(x)c(t))\big) = U(t). \end{aligned} \tag{32}$$

Első pillantásra nincs túl nagy szerencsénk: $U(t)$ és $V(t)$ ugyanolyanok, mint $s(x)$ és $c(x)$, ugyanúgy (26)-hoz jutottunk vissza. Valójában könnyen segíthetünk ezen a bajon, ha nem próbáljuk szétválasztani a két függvényt, hanem (ahogy az sokszor nagyon hasznos) együtt vizsgáljuk őket. Magyarul, vezessünk be egy újabb segédfüggvényt, $Z(t)=U^2(t)+V^2(t)$-t, (32) szerint:

$$Z'(t) = 2U(t)\,U'(t)+2V(t)V'(t) = 2\big(U(t)V(t)-V(t)\,U(t)\big) \equiv 0.$$

Így $Z'(t)\equiv 0$, azaz $Z(t)\equiv \text{constans}=Z(0)$. Mivel feltettük, hogy $s(0)=0$, $c(0)=1$, tehát (31)-ből azonnal leolvashatjuk, hogy $U(0)=V(0)=0$, azaz $Z(0)=0$. Ezért $Z(t)\equiv 0$, tehát ($Z=U^2+V^2=0$-ból) $U\equiv 0$, $V\equiv 0$. Készen vagyunk.

Ezen a ponton emlékeztetjük az olvasót, hogy a 9. tétel bizonyításával a 7. tétel bizonyítását is befejeztük.

A 8. tételt egy feladatsor formájában bizonyítjuk be.

Legyenek $s(x)$ és $c(x)$ függvények tetszőleges 0-ban folytonos megoldásai (17)—(19) feltételeknek!

19. feladat: Bizonyítsuk be, hogy $s(x)$ és $c(x)$ függvények mindenütt folytonosak!

20. feladat: Mutassuk meg, hogy ha egy a pontban ismerjük az $s(a)$ és $c(a)$ értékeket, akkor $s(na)$ és $c(na)$ értékeit is ki tudjuk számítani az addíciós formulákból minden n egész számra!

21. feladat: Legyen $a>0$, és tegyük fel, hogy $c(x)>0$ minden $(0, a)$-beli x-re. Mutassuk meg, hogy $c(a)$ értékéből kiszámítható $c\left(\frac{a}{2^n}\right)$ értéke is, minden n természetes számra! (Vezessük le, hogy $c(2x)=2c^2(x)-1$ minden x-re!)

22. feladat: Legyen $a>0$ és $c(x)>0$ minden $(0, a)$-beli x-re. Mutassuk meg, hogy ha $s(a)$ értékét ismerjük, akkor $s\left(\frac{a}{2^n}\right)$ értékét és $c\left(\frac{a}{2^n}\right)$ értékét is kiszámíthatjuk, minden n-re! (Tudjuk (30)-at és hogy $s(2x)=2s(x)\cdot c(x)$.)

A 8. tétel bizonyításának befejezése. Legyen $\hat{s}(x)$ és $\hat{c}(x)$ függvény egy másik, 0-ban folytonos megoldása (17)—(19) feltételeknek. Mivel $c(x)$ és $\hat{c}(x)$ függvények folytonosak, és $c(0)=\hat{c}(0)=1$, tehát van olyan $d>0$, hogy $c(x)$ és $\hat{c}(x)$ is pozitív $(-d, d)$-ben. Ha találunk olyan $(0, d)$-beli a-t, melyre $s(a)=\hat{s}(a)$, akkor a *22. feladat* szerint $s(x)=\hat{s}(x)$ és $c(x)=\hat{c}(x)$ minden $s=\frac{a}{2^n}$-re. Ebből — a 20. feladat szerint — $s(x)=\hat{s}(x)$ és $c(x)=\hat{c}(x)$ minden $x=k\cdot\frac{a}{2^n}$-re, azaz egy mindenütt sűrű halmazon. Ezért a 19. és a 4. feladat szerint $s(x)=\hat{s}(x)$ és $c(x)=\hat{c}(x)$ mindenütt.

Induljunk ki most a tétel $\tilde{s}(x)$ függvényéből. Ez páratlan, folytonos és nem azonosan 0. Ekkor az $\tilde{s}(x)$ függvény nem azonosan 0 $(-d, d)$-ben sem (ellenkező esetben $\tilde{s}(2x)=2\tilde{s}(x)\tilde{c}(x)$ miatt a $(-2d, 2d)$ intervallumban is azonosan 0 volna stb., tehát mindenütt 0 volna). Ezért van olyan $b>0$, hogy s felveszi $b-$t és $-b-$t. $(-d, d)$-ben Bolzano tétele szerint minden köztes értéket is felvesz. Mivel s folytonos, tehát választhatunk egy olyan kicsi $a>0$-t, hogy $-b<s(a)<b$, azaz egy alkalmas $(-d, d)$-beli a_1-re $s(a)=\tilde{s}(a_1)$. Legyen $q=a_1/a$. Ekkor $\hat{s}(x):=\tilde{s}(qx)$-re is triviálisan igazak a (17)—(19) összefüggések, és $s(a)=\hat{s}(a)$. Ezért, mint már beláttuk, $s(x)\equiv\hat{s}(x)$ és $c(x)\equiv\hat{s}(x)$. Így beláttuk, hogy $s(x)\equiv\tilde{s}(qx)$ és $c(x)\equiv\equiv\tilde{s}(qx)$.

Egy közvetlen út a trigonometrikus függvények hatványsorához

Már eddig sem győztük hangsúlyozni, hogy valójában nem a trigonometrikus és exponenciális függvény egy újfajta bevezetése volt célunk, hanem ezt csak egy igen hasznos ürügynek tekintettük, valójában az analízis néhány érdekes módszerét akartuk bemutatni. Az alábbiakban is ugyanehhez az elvhez tartjuk magunkat, de most más ürügyet keresünk.

Ezúttal feltesszük, hogy már tudjuk vagy elfogadjuk, hogy a $\sin x$ és $\cos x$ függvények léteznek, és hogy

$$\frac{\sin x}{x}\to 1 \quad \text{ha} \quad x\to 0.$$

Feltesszük továbbá az addíciós képleteket: (29)-et. Azért éppen ezeket tesszük fel, mert ezek középiskolában elfogadottnak vehetők.

A *cél* (vagy ürügy): egy szakkör keretében *levezetni a* $\sin x$ *és* $\cos x$ *hatványsorba fejtését,* aránylag kis munkával, tehát anélkül, hogy hatványsorokról vagy akár végtelen sorokról tudnánk; a Taylor-sorfejtés Lagrange-féle maradéktagjának ismeretét sem tételezve fel.

A következő felépítést használhatjuk. Mindenképpen el kell jutnunk ahhoz, hogy $\sin x$ és $\cos x$ deriválhatóak és

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \tag{33}$$

Erre lényegében két módszert szoktak alkalmazni, talán kényelmesebb a $\sin x - \sin a$ szorzattá alakításából számítani ki a $\frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ differenciahányados határértékét. Ezt itt nem részletezzük, hiszen minden tankönyvben megtalálható.

Még egy (közismert) állításra lesz szükségünk:

10. tétel: Ha egy $f(x)$ függvény differenciálható és $f'(x) > 0$ $[0, a)$-ban, akkor a függvény itt szigorúan monoton növő.

Ezután a következő módon járhatunk el. Először észrevesszük, hogy $\sin x$ és $\cos x$ akárhányszor differenciálhatóak. Valóban, ha például már tudjuk, hogy $\sin x$ 5-ször differenciálható, akkor $(\cos x)' = -\sin x$-ből adódik, hogy $\cos x$ 6-szor differenciálható stb.

A 10. tételnek egy kissé kevésbé szokásos, de ekvivalens alakja a következő.

11. tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ *függvények differenciálhatók* $[0, a)$-ban és $f(0) = g(0)$, továbbá $f'(x) > g'(x)$ minden $x \in (0, a)$-ra, akkor $f(x) > g(x)$ $(0, a)$-ban.

23. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a 10. és 11. tételek ekvivalensek! (Nekünk csak a triviális 10. tétel $\Rightarrow$ 11. tétel következtetésre lesz szükségünk.)

Az alábbiakban a trigonometrikus függvények polinommal való közelítéseit keressük. Abból indulunk ki, hogy

$$(a) \qquad -1 \leqq \sin x \leqq 1 \quad \text{és} \quad -1 \leqq \cos x \leqq 1.$$

Innen rögtön következik, hogy

$$(b) \qquad \sin x < x, \quad \text{ha} \quad x > 0,$$

ebből pedig, hogy

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x, \quad \text{ha} \quad x > 0.$$

Ugyanis ((*a*)-t felhasználva) alkalmazhatjuk a 11. tételt $f(x) = x$ és $g(x) = \sin x$ függvényekre: $(\sin x)' \leqq 1$, majd alkalmazhatjuk $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ függvényekre is. (Ellenőrizzük!) (*b*) pontosabb információt ad, mint (*a*), de még ez is avítható, ugyancsak a 11. tétel felhasználásával:

$$(c) \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{és}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (x > 0).$$

Valóban, a $\sin x$-re vonatkozó javításhoz $\sin x$ alsó becslését kell javítanunk. Ha $f(x) = \sin x$ és $g(x) = x - \frac{x^3}{6}$, akkor $f'(x) = \cos x$ és $g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, azaz alkal-

mazható a 11. tétel: éppen $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$-et kapjuk. Hasonlóan bizonyítható $\cos x$ felső becslése is.

24. feladat: Bizonyítandó, hogy $x>0$-ra

(*d*)
$$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!} \quad \text{és}$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

(*d*) alapján már elég pontosan kiszámíthatjuk egy szög szinuszát és koszinuszát. Ha ugyanis minden $x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$-ra tudjuk $\sin x$-et és $\cos x$-et, akkor $\sin 2x=2\sin x\cdot$ $\cdot\cos x$ és $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ alapján [minden] $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$-re is, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ alapján pedig már minden x-re ismerjük a szögfüggvényeket. Ha viszont $x\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right]$, akkor (*d*)-ből látjuk, hogy

$$0<\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)<\frac{x^5}{120}.$$

Azaz, ha (*c*) alsó becsléséből számítjuk $\sin x$-et, a hiba legfeljebb $\frac{x^5}{120}<10^{-4}$. Így (*c*) is már lényegében 4 tizedes pontosságú. Látni fogjuk, hogy

$$0<\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)-\sin x<\frac{x^7}{5040},$$

azaz $\sin x$ (*d*)-beli felső közelítése $3\cdot 10^{-7}$-nél pontosabb. A $\cos x$-re még jobb a helyzet! Miért?

Az (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) egyenlőtlenségek egyre jobb közelítései a $\sin x$-nek és $\cos x$-nek. Ez tovább folytatható!

12. tétel: Legyen

$$P_k(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

és

$$Q_k(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Ekkor tetszőleges pozitív páros k-ra és $x>0$-ra

(34)
$$P_{k+1}(x)<\sin x<P_k(x)$$

és

(35)
$$Q_{k+1}(x)<\cos x<Q_k(x).$$

A bizonyítást az olvasóra hagyhatjuk.

24. feladat; Ha k páros és $x>0$, akkor

$$0 < P_k(x) - \sin x < \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \tag{36}$$

és

$$0 < Q_k(x) - \cos x < \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}. \tag{37}$$

Mi a helyzet, ha k páratlan?

A fentiekből leolvasható, hogy sin x, cos x meghatározása nem jelent elvi problémát. Mivel elég $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$-ra ismerni az értékeiket, adott $\varepsilon>0$-hoz, ha $2^{2k+2}(2k+2)! > \frac{1}{\varepsilon}$, akkor $P_k(x)$ és $Q_k(x)$ ε-nál pontosabban közelítenek. Így, ha (d)-t egy lépésben javítjuk, kb. 10^{-9} pontosságot érünk el $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$-ban és ezután kb. $\frac{1}{2} \cdot 10^{-11}$-et. A cos x közelítése itt is jobb.

Befejezésül visszatérünk az e^x függvényhez. Vajon ez is ilyen jól számolható? Lényegében igen, mert $e^{-x} \cdot e^x = 1$, így elég csak e^{-x}-et számolni $x>0$-ra. Ha

$$R_k(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} x^k,$$

akkor

$$R_{2l-1}(x) < e^{-x} < R_{2l}(x). \tag{38}$$

Megjegyzés. A sin x, cos x, e^{-x}-re kapott sorok úgynevezett alternáló sorok és Leibniz-soroknak is szoktuk őket nevezni, bár előfordulhat, hogy tagjaik abszolút értéke nem az elejétől monoton csökkenő, csak $k>k_0$-ra.

25. feladat; Bizonyítsuk be (38)-at! Számítsuk ki $\frac{1}{e}$-t (38)-ból 10^{-5} pontossággal, tetszőleges kalkulátorral, de csak az alapműveletek és esetleg 1 memória felhasználásával!

Néhány további feladat.

26. feladat; Vezessük le a (30) összefüggést (26)-ból, és (19)-ből!

27. feladat; Vezessük le (18)-at a (17), (19) és (30) feltételekből!

28. feladat; Bizonyítsuk be, hogy $C(1)<0$, és így a $C(x)$ függvénynek van gyöke a (0, 1) intervallumban! (Alkalmazzuk a *24. feladat* (d) becslését!)

29. feladat; Mutassuk meg, hogy ha $C(a)=0$, akkor $S(x+a)=\pm C(x)$ és $C(x+a)=\mp S(x)$; valamint, hogy $S(x)$ és $C(x)$ függvények periodikusak $2a$ szerint!

30. feladat; Bizonyítsuk be, hogy minden folytonos és periodikus függvénynek van legkisebb, pozitív periódusa!

31. feladat: Legyen a_0 a $C(x)$ függvény legkisebb, pozitív gyöke! Mutassuk meg, hogy $S(a_0)=1$, és $S(a_0-x)=C(x)$, valamint $C(a_0-x)=S(x)$ minden x-re!

Megjegyezzük, hogy a cikk első részében vázolt felépítésben a π számot szokás úgy definiálni, mint a *31. feladatban* szereplő a_0 szám kétszeresét.

32. feladat: Legyen

$$\operatorname{sh} x := x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots,$$

(39)

$$\operatorname{ch} x := 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^6}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots.$$

Mutassuk meg, hogy

(40) $$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad \text{és} \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

a hatványsorok tagonkénti deriválásával! Mutassuk meg ugyanezt

(41) $$\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

alapján is!

33. feladat: Mutassuk meg a hatványsoros módszerrel, hogy

(42) $$y''(x) = k^2 y(x)$$

egyenletnek csak $A\operatorname{sh}x+B\operatorname{ch}x$ alakú megoldásai vannak!

34. feladat: Vezessük le $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x\equiv 1$-et (40)-ből, illetve (41)-ből!

35. feladat: Fejezzük ki $\operatorname{sh}(x+y)$-t és $\operatorname{ch}(x+y)$-t $\operatorname{sh} x$-szel, $\operatorname{sh} y$-nal, $\operatorname{ch} x$-szel és $\operatorname{ch} y$-nal, azaz keressük meg az addíciós képleteket!

Egy fizikai alkalmazás

A cikk elején a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletét oldottuk meg, így — bár egy kissé kerülő úton — jutottunk el a trigonometrikus függvényekhez. Ennek kapcsán meg kell említeni a középiskolai fizikaoktatás egy alapproblémáját: ha nincs differenciálás és differenciálegyenlet, akkor számtalan logikus tárgyalás silányul zavarossá. Jó példa erre a harmonikus rezgőmozgás, mely egy „légből kapott" ötleten alapul: azon, hogy a forgómozgás vetületeként fogjuk fel a rezgő testet. Emellett persze nem tisztázza azt, hogy ha egy kétdimenziós mozgást levetítünk, akkor a sebességvektor és a gyorsulásvektor vetülete miért lesz a vetületmozgás sebessége és gyorsulása, továbbá nem tisztázza az unicitás kérdését: ha egy $y(t)$ függvény kielégíti a (13) differenciálegyenletet, és ismert $y(0)$, $y'(0)$, akkor már egyértelműen meghatározott.

Ha viszont az unicitás kérdését már tisztáztuk, akkor kiderül, hogy a körmozgásra már nincs is szükség, csak az Asinkt-függvényt kell kétszer differenciálni.

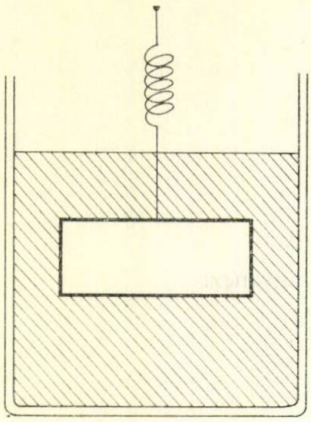
De hagyjuk a kritikai megjegyzéseket, hiszen a probléma bonyolultabb és mélyebb, minthogy pár sorban el lehetne intézni.

A következőket szerettük volna tisztázni: Ha van lehetőség erre, azaz a diákok tudják, hogy a gyorsulás az útfüggvény második deriváltja, akkor a legideálisabb megoldás:

(*a*) felírni a differenciálegyenletet,

(*b*) megoldani ad hoc módszerek nélkül.

Ez szinte soha sem megy. Ezért gyakran megelégedhetünk azzal is, hogy „kitaláljuk" a megoldást, ellenőrizzük, hogy ez valóban megoldás, majd megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. Végül gyakran be kell érni azzal, hogy kitaláljuk a megoldást, és megmutatjuk, hogy az a megoldás.



Ezen hosszú eszmefuttatás után vizsgáljuk meg a csillapított harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletét! Tegyük fel, hogy egy rugózó tömeg egy viszkózus folyadékban mozog! Ilyenkor erős csillapítóerő hat rá, melyről fel szoktuk tenni, hogy a sebességgel arányos. Így az m tömegű testre y kilengés esetén $-k^2y$ rugóerő hat és $-cy'$ közegellenállás. Ezért

$$my'' = -ky - cy'. \tag{42}$$

Ha most a megoldást egész függvény alakjában keressük, a már tanult eljárás lemásolható, $y(t) = \sum a_n t^n$-ben a_n-ek meghatározhatók, de sajnos bonyolultabban, ezért nehezebb a szabályosság felismerése. Ezért nem ezt az utat választjuk. Megpróbáljuk a $-cy'$ tagot „kiirtani", mint ahogyan a másodfokú egyenletben is kiirtjuk a lineáris tagot. Legyen $u(t) = e^{-\gamma t}y(t)$. Ekkor (42) átírható:

$$\left(e^{\gamma t}u(t)\right)'' = -k\left(e^{\gamma t}u(t)\right) - c\left(e^{\gamma t}u(t)\right)',$$

azaz

$$\left(\gamma e^{\gamma t}u(t) + e^{\gamma t}u'(t)\right)' = -ke^{\gamma t}u(t) - c\left(\gamma e^{\gamma t}u(t) + e^{\gamma t}u'(t)\right),$$

vagyis

$$\gamma^2 u + 2\gamma u' + u'' = -ku - c\gamma u - cu'.$$

Összevonva

$$u'' = -(c + 2\gamma)u' - (k + c\gamma + \gamma^2)u.$$

Így $\gamma = -\frac{c}{2}$ esetén (13) alakú differenciálegyenlethez jutottunk, amelynek már ismerjük a megoldását:

$$\omega = \sqrt{k + c\gamma + \gamma^2}, \quad u(t) = A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t.$$

Mivel $y = e^{\gamma t}u(t)$, tehát

$$y(t) = e^{-\frac{c}{2}t} \quad (A \cdot \sin \omega t + B \cdot \cos \omega t).$$

DR. BERÉNYI ZSUZSANNA ÁGNES
középiskolai tanár
Budapest

Eszperantista matematikusok budapesti találkozója

Az eszperantó világméretű térhódításának jeleként a tudományos életben is egyre jobban elterjed ez a nemzetközi nyelv. A szakmai kifejezések pontos értelmezésére is alkalmas az eszperantó, sőt logikus rendszere a többi nyelvnél jobban tudja kielégíteni a matematikai igényeket. A matematikusok között az eszperantisták már 1973-ban nemzetközi szervezetet alakítottak; ennek neve: *Internacia Asocio de Esperantistaj Matematikistoj* (rövidítve: IAdEM, magyarul: *Eszperantista Matematikusok Nemzetközi Szövetsége*). Eleinte a tagok főként csak levelezés útján tartottak kapcsolatot egymással. Elsősorban a szakmai kifeje-

zésekről folyt a vita, de felvetődtek módszertani kérdések, feladatmegoldások és egyéb matematikai érdekességek is. Nemrég az IAdEM tagjainak gondozásában megjelent Paderbornban (NSZK) az *Eszperantó Matematikai Szakszótár*. Az IAdEM folyóirata: a *Matematiko Translimen* (magyarul Határokat nem ismerő matematikának mondhatnánk) változatos és gazdag tartalommal szól a világ minden táján élő olvasóihoz.

Az IAdEM első összejövetelére Budapesten került sor 1980. december 29-től 31-ig a Budapesti Műszaki Egyetemen, a Bolyai János Matematikai Társulat és a Magyar Eszperantó Szövetség közös rendezésében. Kilenc országból érkeztek résztvevők. Közöttük volt *Lo Jacomo*, az IAdEM titkára Franciaországból; *Dr. Helmar Frank*, a Paderborni Kibernetikai Pedagógiai Intézet igazgatója; *Wolfgang Schmid* professzor Glücksburgból (NSZK); *Francisko Simonet* a Moszkvai Állami Egyetemről; *Jan O. de Kat* Hollandiából; *Mauro la Torre* Olaszországból; *Liisi Oterma* csillagász — akiről már eddig is több égitestet neveztek el — Finnországból; *Heikki Alikoski*, a turkui Csillagvizsgáló Intézet vezetője szintén ugyanabból az országból; *Helmut Rössler* professzor az NSZK-ból; *Petko Arnaudov*, az Eszperantó Matematikai Szakszótár egyik készítője Bulgáriából és még sokan mások. A Bolyai Társulat meghívására több, nem eszperantista magyar vendég is részt vett az összejövetelen.

Az ünnepélyes *megnyitót Dr. Haszpra Ottó*, a Budapesti Műszaki Egyetem tanára, a Magyar Eszperantó Szövetség Tudományos Bizottságának elnöke tartotta. Utána *Dr. Surányi János* egyetemi tanárnak, a Bolyai Társulat elnökének előadása következett *Geometriai módszerek a számelméletben* címmel. Az előadást nagy érdeklődés kísérte. Erre vallott az utána feltett sok kérdés is. A francia vendégek például aziránt érdeklődtek, vajon ezt a módszert általánosan alkalmazzák-e Magyarországon. A válaszból megtudhatták, hogy nálunk az egyetemeken a módszerek tekintetében nem korlátozzák az előadók szabadságát.

Jan O. de Kat magas színvonalú *goniometriai* előadása után *dr. Haszpra Ottó* előbb *a számítógépekről* beszélt, majd saját kutatási területéről, *a vízgazdálkodásról* — szemet gyönyörködtető színes diaképek vetítésével kísérve mondanivalóját. Tisztán matematikai jellegű volt *Kovács Zoltánnak*, a Budapesti Tanítóképző Főiskola adjunktusának saját kutatásait bemutató előadása *Prímszámvadászat* címen. Módszertani szempontból különösen értékes volt ez az előadás, amit az is mutatott, hogy érdekes feladataival sikerült újra felélénkíteni a hallgatóság késő este már-már lankadó figyelmét. Kovács Zoltán előadásában olyan programozható számítógépet mutatott be működés közben, amely növekedő sorrendben egymás után írta ki a prímszámokat. Olyan táblázatokat is osztott szét a jelenlevők között, amelyek 25 000-ig tartalmazzák a prímszámokat. Az előadás hallgatói megtanulták az ötletesen tömörített, különféle táblázatok használatát. Érdekességként említjük meg, hogy Kovács Zoltán mindössze három héttel az összejövetel előtt kezdett el alaposabban foglalkozni az eszperantóval.

A többi előadás egy része a számítógépekkel és azoknak a szövegfordításban történő alkalmazásával foglalkozott. *Jan O. de Kat* működő *eszperantó—angol fordítóprogramot* készített. Ez a fordítóprogram az angolon kívül más élő nyelvekre is kiterjeszthető. A számítógépekről szóló előadások bemutatták a számítógépek elméleti és gyakorlati működését. Nagy élvezetet jelentett a hallgatóságnak *Münnich Antalnak* a programnyelvekről szóló roppant érdekes, történeti áttekintést nyújtó előadása.

Az előadások harmadik része a matematika tanításának egyes problémáit választotta tárgyául. Az összejövetel első napjának délelőttjén *Balogh Viktória*, az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola

docense tartott ilyen jellegű előadást. Először *a magyar matematikatanítás rendszeréről* adott tájékoztatást. A különböző iskolatípusok rövid ismertetése után *az általános iskola új matematikatantervét* tárgyalta részletesebben. Külön is beszélt a reform egyes lépéseiről, és bemutatta a lépcsőzetes bevezetés egyre növekvő százalékos arányait. Felsorolta a tantervi anyag öt fő témakörét. Ezek: Halmazok, logika; Számtan, algebra; Relációk, függvények, sorozatok; Geometria, mérések; Kombinatorika, valószínűség, statisztika. Végül *a tanárok felkészítéséről* ejtett szót. A külföldiek az előadással kapcsolatban főként a heti óraszámok iránt érdeklődtek. Elmondták továbbá, hogy a tantervi reformok bevezetése más országokban is hasonló gondokkal járt, mint nálunk.

E sorok írójának rövid előadása a magyar matematikatanítás ismertetését kívánta kiegészíteni *a felnőttoktatás sajátosságaival*. A felnőttoktatás eltérő vonásai egyrészt az iskola szervezetéből, másrészt a tanulók helyzetéből következnek. Azonkívül a tanulást emberi tényezők is befolyásolják. Mindezek miatt az esti tagozaton csak pozitív megközelítéssel, dicsérettel lehet eredményt elérni. Szó esett még a napi kifáradást követő passzivitás leküzdésének különféle módszereiről.

Szabó Piroska, csepregi tanárnő *a geometria tanításában* alkalmazott egyéni megoldásait mutatta be nagy érdeklődéstől kísérve.

Petko Arnaudov bolgár matematikatanár arról beszélt, hogyan szervezte meg matematikatagozatos osztályba járó diákjainak *iskolán kívüli matematikai tevékenységét*. Sok friss ötletet adott a jelenlevőknek a matematika népszerűsítéséhez.

Az összejövetel egyik középponti témája volt *az eszperantó nyelvű matematikai kifejezések megvitatása*. Erre az alkalomra készítette el *Kouthny Ilona az Eszperantó Matematikai Szakszótár* magyar fordítását. *Mauro la Torre* ismertette a matematikai szakkifejezésekkel kapcsolatban felvetődött kérdéseket, és a jelenlevők észrevételeikkel járultak hozzá a viták eldöntéséhez.

December 30-án alakult meg a *Számítógépes Eszperantista Matematikusok Nemzetközi Szervezete* (ez még nem hivatalos elnevezés) *Wolfgang Schmid* professzor elnökségével. A magyar *dr. Proczkó Péter* lett a titkár és a holland *Jan O. de Kat* a pénztáros.

Az IAdEM tagjai új stratégiát dolgoztak ki a szervezet további működésére vonatkozólag. Elhatározták, hogy a budapesti összejövetelen elhangzott előadásokat meg fogják jelentetni a Matematiko Translimen külön számában. Megtárgyalták, hogyan lehetne szorosabbra fűzni a kapcsolatot egyéb eszperantó szervezetekkel, pl. a Nemzetközi Eszperantó Tanári Szövetséggel (Internacia Ligo de Esperantistaj Instruistoj, rövidítve: ILEI), valamint más, nem eszperantó szervezetekkel, pl. különféle nemzeti és nemzetközi matematikai társulatokkal.

Igen nagy élmény volt a tizenegy éve, ENSZ-támogatással épült SZÁMOK megtekintése. Ez a Nemzetközi Számítástechnikai Központ tudományos kutatási és szolgáltató teendőin kívül elsősorban oktatási feladatokat lát el. Különböző szintű programozó, folyamat- és rendszerszervező tanfolyamait sok külföldi hallgató is látogatja, főként ENSZ-ösztöndíjasok. A belföldi igényeket jórészt már ki is elégítették. A rendkívül korszerű intézet könyvtárában működő számítógépes, ún. Babylon-program ad tájékoztatást a fellelhető szakirodalomról témák szerint. Számítógépei a legfejlettebbek közé tartoznak. A látogatást követően külföldi vendégeink egy része is kedvet kapott az őket érdeklő valamelyik SZÁMOK-tanfolyam elvégzésére. A látogatás alkalmával *Dr. Helmar Frank* bemutatta szellemes programját, a PREDIS-t, majd rendelkezésünkre is bocsátotta azt.

Az IAdEM összejövetelét a szokásos Nemzetközi Eszperantó Téli Találkozó (Vintra Esperantista Ferio, rövidítve: VEF) idején rendezték. Ezért a résztvevők a VEF néhány rendezvényére is el tudtak látogatni. Megtekintették az alkalmi postahivatalt, ahol a VEF megnyitásának napján elsőnapi bélyegzővel pecsételték le a bélyegeket, részt vettek a nagy sikerű műsoros esten, a budapesti városnézésen és meglátogatták Szentendrét. Többen együtt ünnepelték az új esztendő beköszöntét.

A jól sikerült találkozónak nemcsak szakmai eredményei voltak, hanem erősítette a személyes kapcsolatokat, melegebbé tette az emberek közötti megértést az eszperantó nyelv segítségével.

„Matematikatanárok versenyé"-nek 1980. évi díjazottjai

I. díjat (3500 Ft-ot) nyert **Bartha Gábor,** a szentendrei Móricz Zsigmond Gimnázium tanára;

II. díjat (2500 Ft-ot) nyert **Csörsz Sándor,** a dunakeszi 4. sz. Általános Iskola tanára;

III—IV. díjat (1600—1600 Ft-ot) nyert **Nyírő László,** a mezőkövesdi 3. sz. Általános Iskola tanára és **Sziky Csilla,** a budajenői Általános Iskola tanára;

V. díjat (800 Ft-ot) nyert **Szánthó Gyula,** a gyulai Kertészeti Szakközépiskola tanára.

Szívből gratulálunk a díjazottaknak és további sikereket kívánunk nekik.

A Szerkesztőség

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

963. Bizonyítsuk be, hogy bármely a és n természetes számra a^2-a+1 osztója az $(a-1)^{n+2}+a^{2n+1}$-nek!

964. Legyen $f:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ és minden $x, y\in\mathbf{N}$-re

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1.$$

Adjuk meg az $x\mapsto f(x)$ leképezést, ha $f(1)=1$!

Kóváry Károly, Budapest

965. Egy ABC háromszög BC oldalára befelé (vagyis az A csúcsot tartalmazó félsíkban), az AB és AC oldalaira kifelé emeljünk rendre egy-egy azonos körüljárású, egymáshoz hasonló $BCDE$, $ACD'E'$, $BAD''E''$ konvex négyszöget! A $BCDE$ négyszög DE oldalára kifelé emeljünk az ABC háromszöghöz hasonló, vele egyező körüljárású FED háromszöget! (A hasonló sokszögek egymásnak megfelelő csúcsait azonos sorrendben soroltuk fel.) Bizonyítsuk be, hogy az $AE'FD''$ négyszög paralelogramma!

Szánthó Gyula, Gyula

966. Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ $(a \neq 0)$ függvénynek az x_1 és x_2 helyen $(x_1 \neq x_2)$ szélsőértéke van. Bizonyítsuk be, hogy az $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$ pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy, a koordináta-rendszer kezdőpontján átmenő egyenesre, ha $bc-9ad=0$!

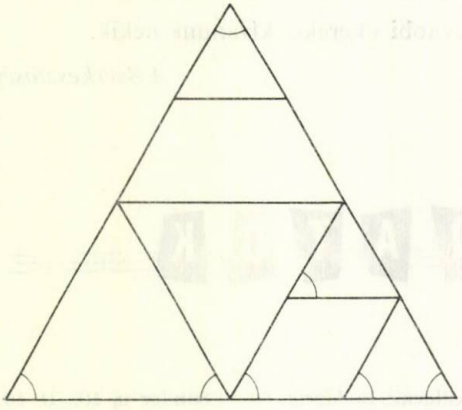
Strohmajer János, Budapest

967. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív n egészre teljesül az

$$\frac{e^n-1}{e-1} \leqq \sum_{k=1}^{n} k^k \leqq \frac{(\sqrt{e})^{n(n+1)}-(\sqrt{e})^n}{(\sqrt{e})^{n+1}-\sqrt{e}}$$

egyenlőtlenséglánc!

Bencze Mihály, Brassó



1. ábra

968. Egy szabályos háromszög egyik oldalát négy egyenlő részre osztottuk, és az osztópontokban az oldalakkal párhuzamosokat húzva a háromszöget hét darabra vágtuk (1. ábra).

Határozzuk meg azokat a konvex sokszögeket, amelyeket e hét darab maradéktalan felhasználásával összerakhatunk!

Feladatmegoldások (939—944.)

939. Tekintsük az összes olyan egyenest, amely az

$$y = 2x^4+7x^3+3x-5$$

egyenletű görbét négy különböző $(x_i; y_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$ értéke nem függ az egyenes megválasztásától!

Megoldás: Minden, a feltételnek eleget tevő egyenes egyenlete $y=mx+b$ alakú, hiszen az y tengellyel egyállású egyenesnek a görbével egyetlen közös pontja van. A

$$2x^4+7x^3+3x-5 = mx+b$$

egyenlet valós gyökei a görbe és az egyenes közös pontjainak első koordinátáit adják. Ha egyenletünknek négy különböző x_1, x_2, x_3, x_4 valós gyöke van, akkor a gyöktényezős alak felhasználásával minden x-re

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = x^4+\frac{7}{2}x^3+\frac{3-m}{2}x-\frac{5+b}{2}.$$

Ebből pedig

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = -\frac{7}{2}$$

adódik, vagyis

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) = -\frac{7}{8},$$

ami valóban független m és b, azaz az egyenes megválasztásától.

Bagi Gábor, Barcs,
Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest.

Megjegyzés: Az n-edfokú $y=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ és a legfeljebb $n-2$-edfokú $y=\sum_{k=0}^{n-2} b_k x^k$ görbék közös pontjait az $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}(a_k-b_k)x^k=0$ egyenlet gyökei adják. Ha ennek az egyenletnek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós gyökei, akkor a $\sum_{k=1}^{n} x_k=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ miatt a közös pontok első koordinátáinak összege független a b_k $(0\leqq k\leqq n-2)$ együtthatóktól.

Vermes Miklós, Budapest

A megoldók száma: 12.

940. Legyen A_n az n-nél kisebb, n-hez relatív prím, pozitív egész számok halmaza. Melyek azok a pozitív egész n-ek, amelyekre A_n elemei számtani sorozat egymást követő elemei?

Megoldás: Ha n páratlan és legalább öt, akkor $1\in A_n, 2\in A_n$ és $n-1\in A_n$ miatt A_n elemei csakis akkor adnak számtani sorozatot, ha $A_n=\{1;2;3;\ldots;n-1\}$, azaz n prím. Ha n hattal nem osztható páros szám, akkor $1\in A_n$, $3\in A_n$ és $n-1\in A_n$ miatt számtani sorozathoz csakis akkor jutunk, ha $A_n=\{1;3;5;\ldots;n-1\}$, azaz $n=2^k$ $(k\geqq 3)$.

Végül, ha $n=6l$ és p az a legkisebb prím, amely n-nek nem osztója, akkor $1\in A_n$, $p\in A_n$ és $n-1\in A_n$ miatt van olyan k pozitív egész, hogy $1+(p-1)\,k=n-1$. Ha most $p=6l+1$ alakú, akkor $n=6l+2$ alakú, ami ellentmond feltételünknek. Így p csak $6l+5$ alakú lehet. Ekkor $2p-1$ osztható hárommal, és így $2p-1\notin A_n$ miatt A_n csakis az $\{1;p\}$ halmaz lehet.

Összefoglalva: Mivel egy számtani sorozat legalább háromelemű, ezért A_n elemei akkor és csak akkor rendezhetők számtani sorozatba, ha n ötnél nem kisebb prímszám vagy nyolcnál nem kisebb kettőhatvány.

Megoldók száma: 9.

941. Legyen H véges halmaz! Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k| = (2^k-1)\sum|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k|,$$

ahol az összegezés kiterjed valamennyi $A_1, A_2, \ldots, A_k\subseteq H$ választásra! Az $|S|$ az S halmaz számosságát jelöli.

Megoldás: Legyen $|H|=n$. A bizonyítandó egyenlőséget alakítsuk át:

$$\sum|A_1\cup A_2\cup\ldots A_k|+\sum|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k| = 2^k\sum|A_1\cap A_2\cap\ldots A_k|. \tag{1}$$

Mivel az A_i $(1\leqq i\leqq k)$ halmazok H részhalmazai, ezért egyesítésük is H-nak részhalmaza, s ezért

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k = H\setminus\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k} = H\setminus(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_k).$$

A

$$\sum|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k| = \sum|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_k|$$

nyilvánvaló, hiszen az összegezés valamennyi $A_1, A_2, \ldots, A_k\subseteq H$ választásra kiterjed, ezért a fenti egyenlőség jobb oldala a bal oldali összeg tagjainak átrendezése.

E megjegyzések felhasználásával (1) tovább alakítható,

$$\sum \{|H \setminus (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)| + |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|\} = 2^k |\sum A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|. \tag{2}$$

Felhasználva most, hogy H bármely B részhalmazára

$$|H \setminus B| + |B| = |H|$$

a (2)-ből

$$\sum |H| = 2^k \sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| \tag{3}$$

következik. Mivel H számossága n, ezért H részhalmazainak száma 2^n, a $\sum |H|$ összegnek (és persze valamennyi korábbi összegnek is) annyi tagja van, ahányféleképpen a 2^n darab részhalmazból kiválasztható k darab nem feltétlenül különböző. Ez $(2^n)^k$-féleképpen lehetséges. Ennélfogva

$$\sum |H| = n(2^k)^n,$$

tehát (3)-ból

$$n(2^k)^{n-1} = \sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|. \tag{4}$$

Feladatunk állítása tehát a (4)-gyel ekvivalens. Legyen $B \subseteq H$ és $|B| = i$. Bebizonyítjuk, hogy azokból a rendezett $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ k-asokból, amelyekre $A_j \subseteq H$ $(1 \leq j \leq k)$ és $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = B$, pontosan $(2^k - 1)^{n-i}$ darab van.

Minden e feltételeknek eleget tevő A_j halmaz nyilván tartalmazza B-t, tehát H-nak ugyanaz az i darab eleme valamennyi ilyen A_j-nek is eleme. Bármely ilyen A_j tartalmazhat további elemeket is, melyek a $H \setminus B$ halmazból valók. Ha $h \in H \setminus B$, akkor ez a h elem nem lehet eleme valamennyi A_j-nek, van tehát e halmazok között legalább egy olyan, melyhez h nem tartozik. Ennélfogva a $H \setminus B$ egy rögzített h eleme $2^k - 1$-féleképpen sorolható $A_1, A_2, \ldots, A_k$ elemei közé. Mivel $|H \setminus B| = n - i$, ezért $H \setminus B$ elemeit éppen

$$(2^k - 1)^{n-i}\text{-féleképpen}$$

sorolhatjuk az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ elemei közé.

H-nak $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ darab i elemű részhalmaza van, ezért a $\sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|$ összegben azoknak a tagoknak a járuléka, amelyeknél a metszet számossága i,

$$i \binom{n}{n-i} (2^k - 1)^{n-i}.$$

Következésképpen

$$\sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = \sum_{i=}^{n} i \binom{n}{n-i} (2^k - 1)^{n-i}. \tag{5}$$

Most már csak azt kell belátnunk, hogy (5) jobb oldala $n(2^k)^{n-1}$-gyel egyenlő.

Felhasználva, hogy $i \binom{n}{n-i} = n \binom{n-1}{n-i}$ és $\binom{n-1}{n} = 0$, majd a $(2^k - 1) + 1$ kifejezésre a binomiális tételt,

$$\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{n-i} (2^k - 1)^{n-i} = n \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{n-i} (2^k - 1)^{n-i} = n \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{n-i} (2^k - 1)^{n-i} =$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{n-i} (2^k - 1)^{n-i} \cdot 1^{i-1} = n(2^k)^{n-1}.$$

Ezzel beláttuk, hogy (4) igaz.

Alexics György, Budapest

Megoldók száma: 2.

942. A teniszben minden labdamenet azzal végződik, hogy a két játékos egyike pontot szerez. *Játékot* az nyer, aki előbb szerez négy pontot úgy, hogy ellenfelének ugyanakkor még legalább kettővel kevesebb pontja van. *Játszmát* az nyer, aki előbb nyer legalább hat játékot úgy, hogy ellenfelének addig legalább kettővel kevesebb játékot sikerült nyernie. Egy játszma során a nyertes félnek az összes pontnak legalább hány százalékát kell elnyernie?

Megoldás: Tegyük fel, hogy A játékos $m:n$ arányban nyert játszmát B játékos ellen!

Jelölje a_m az A játékos által nyert m játék során szerzett pontjainak számát, a_n pedig az általa veszített n játékban szerzett pontok számát.

Ugyanígy b_n a B játékos által nyert n játékban szerzett pontjainak számát jelöli, míg b_m az általa elvesztett m játékban szerzett pontok száma.

Feladatunk a

$$H=\frac{a_m+a_n}{a_m+a_n+b_n+b_m}=\frac{1}{1+\dfrac{b_n+b_m}{a_m+a_n}}$$

hányados alsó határának meghatározása. Ezzel ekvivalens feladat a

$$K=\frac{b_n+b_m}{a_m+a_n} \quad \text{hányados}$$

felső határának meghatározása.

Bebizonyítjuk, hogy $\overline{\lim}\, K=\frac{3}{2}$, amiből $\underline{\lim}\, H=\dfrac{1}{1+\frac{3}{2}}=40\%$. Mivel A nyert játékaiban legalább 2 ponttal többet szerez mint B, ezért

$$2m \leqq a_m-b_m. \tag{1}$$

B az általa nyert n játék mindegyikében legalább 4 pontot szerez, így

$$0 < b_n-a_n \leqq 4n, \tag{2}$$

mert a b_n-a_n különbség akkor a legnagyobb, ha A egyik játékban sem szerez pontot.

Végül $a_m \geqq 4m$ és $a_n \geqq 0$ miatt

$$4m \leqq a_m+a_n. \tag{3}$$

A K számlálójához $a_m+a_n-(a_m+a_n)$ kifejezést hozzáadva, rendezés után az (1), (2) felhasználásával

$$K=\frac{b_n+b_m}{a_m+a_n}=\frac{a_m+a_n+b_n+a_n+b_m-a_m}{a_m+a_n}\leqq 1+\frac{4n}{a_m+a_n}-\frac{2m}{a_m+a_n}.$$

Mivel $n \leqq m-2$, a (3) alkalmazásával

$$K \leqq 1+\frac{4(m-2)-2m}{4m}=\frac{3}{2}-\frac{2}{m}.$$

Ebből pedig

$$H=\frac{1}{1+K}\geqq\frac{1}{1+\frac{3}{2}-\frac{2}{m}}=\frac{2}{5-\frac{4}{m}}\geqq 40\%,$$

amit bizonyítanunk kellett. Egyenlőség nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha mindenütt az áll azaz ha

$$n=m-2,\quad a_m=4m,\quad a_n=0,\quad b_n=4n \quad \text{és} \quad b_m=2m,$$

és ekkor

$$H=\frac{2}{5-\frac{4}{m}}.$$

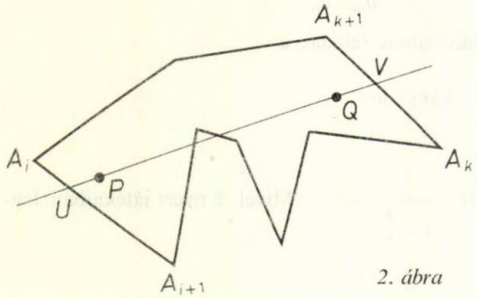
Összefoglalva: Az A játékosnak a játszma során szerezhető pontok legalább 40%-át meg kell szereznie, de csak 40% megszerzésével veszít.

dr. Major Pál, Budapest

Megoldók száma: 6.

943. Egy szabályos háromszöget hogyan kell egy egyenesmenti vágással két olyan darabra vágni, hogy e darabokból maximális átmérőjű konvex alakzatot nyerjünk? (Konvex alakzat átmérőjén az alakzat pontpárjai távolságának szuprémumát értjük.)

Megoldás: Először azt látjuk be, hogy egy n-szög átmérője csúcsai távolságának maximuma, vagyis az n-szög oldalai vagy átlói közül való. Állításunk bizonyítására felhasználjuk azt az ismert tényt, hogy ha egy szakasz belső pontjait egy rögzített ponttal összekötjük, mindegyik adódó szakasz kisebb a végpontokhoz vezető szakaszok hosszabbikánál (lásd: Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába, 63. oldal).



2. ábra

Legyen P és Q az n-szög két tetszőleges pontja (2. ábra).

A PQ egyenes messe utoljára a sokszögvonalat U, illetve V pontokban! Legyen U az A_iA_{i+1}, V pedig az A_kA_{k+1} oldalon. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy

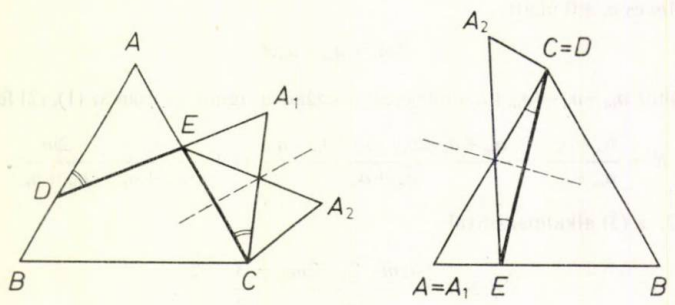
$$UA_{k+1} \leqq UA_k \quad \text{és} \quad A_kA_{i+1} \leqq A_kA_i.$$

Ekkor ismételten alkalmazva idézett tételünket

$$PQ \leqq UV \leqq UA_k \leqq A_kA_i \leqq \max(A_iA_j)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen az ABC szabályos háromszög oldala egységnyi! E háromszög kettévágásával, átdarabolásával csak úgy kaphatunk konvex sokszöget, ha a szeleteket egyenlő hosszú szakaszok mentén illesztjük. Az átdarabolással ily módon kapott sokszög akkor és csak akkor konvex, ha minden szöge konvex.

A két nem feltétlenül különböző, illesztésre kerülő szakaszt, mely lehet a háromszög oldala is, a vágás egyenese vagy elválasztja, vagy sem. Az utóbbi esetben e két szakasz legalább egyike a háromszög belsejében halad, s így kisebb, mint egy (3. *a), b)* ábra).



a) *b)*

3. ábra

Az ADE háromszöget, az EC szelettel egyenlő hosszú DE oldalával, kétféleképpen, az EC felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezhetjük el. Ez a felezőmerőleges a BC szakaszt metszi, mert $BC > EC$, s így

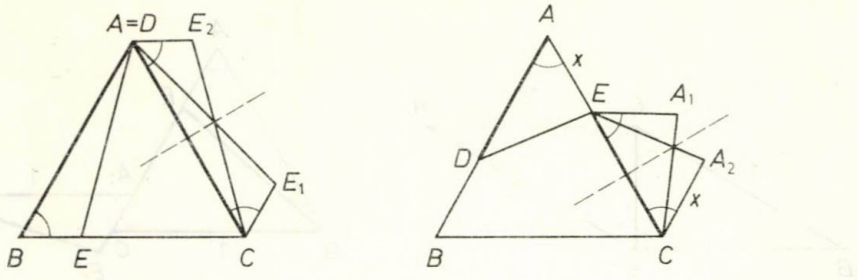
$$BA_1 < BA_2,$$

mert EC és A_1A_2 felezőmerőlegesse közös (3. *a)—b)* ábra). A keletkezett négy-, illetve ötszög BA_2 átlójától különböző oldalai, átlói egynél nem nagyobbak. Viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$BA_2 < BC + CA_2 = BC + AE < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

ezért ez esetekben a konvex n-szög átmérője legfeljebb $\frac{3}{2}$ (Feltehettük, hogy $AE \leqq \frac{1}{2}$, mert ezt a 3. *b)* ábra szerinti esetben átbetűzéssel elérhetjük, a másik esetben pedig ha $AE > \frac{1}{2}$, de akkor a $DE \parallel AB$ kell legyen, s az átdarabolással az eredeti háromszöghöz jutunk.)

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a szelő elválasztja egymástól a két, illesztésre kerülő szakaszt! E szakaszok vagy különböző oldalakon vannak (4. *a)—b)* ábra), vagy ugyanannak az oldalnak két szelete, és ekkor a szelő oldalfelező ponton megy át (5. ábra).



a) *b)*

4. ábra

A 4. *a)* ábráról leolvasható, hogy a keletkezett konvex négyszögek oldalai és AC átlója egynél nem nagyobbak, továbbá — előző esetünkhöz hasonlóan —

$$EE_1 < EE_2 < AE + E_2C = BE + EA < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

A 4. *b)* ábra BCA_iED konvex sokszög oldalai és BA_i átlójától különböző átlói egynél nem nagyobbak. Mivel $BE < BC$, ezért

$$BA_1 < BA_2,$$

és a BCA_2 háromszög BA_2 oldalára alkalmazott cosinustételből

$$BA_2 = \sqrt{1 + x^2 - 2x \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{1 + x + x^2} < \sqrt{3},$$

hiszen $x < 1$.

Végül, ha a szelő felezőponton megy át (5. ábra), akkor

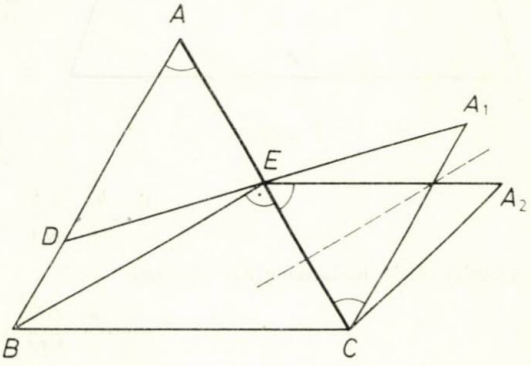
$$BA_1 < BA_2$$

és a BEA_2 háromszög BA_2 oldalára alkalmazott cosinustételből

$$BA_2 = \sqrt{BE^2 + EA_2^2 - 2BE \cdot EA_2 \cdot \cos 150^\circ} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{3}{4} + 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

hiszen $EA_2 = AD \leqq 1$, $BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $BEA_2\sphericalangle = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Az egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $AD = 1$, azaz a szelő a háromszög magasságvonala.



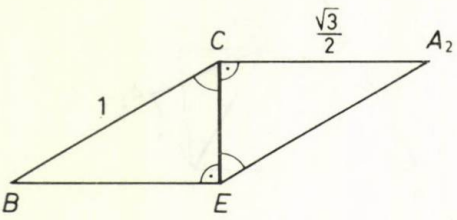
5. ábra

Ezzel beláttuk: az egységnyi oldalú szabályos háromszög maximális $\frac{\sqrt{13}}{2}$ átmérőjű konvex sokszöggé akkor darabolható át, ha a szelő magasságvonal, és az átdarabolással olyan paralelogrammát kapunk, amelynek oldalai $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 és szögei 30°, illetve 150°-ak (6. ábra).

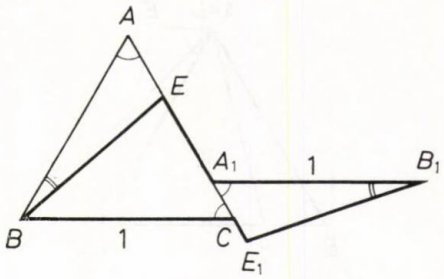
Zalán Péterné, Budapest

Megjegyzés: Ha a konvexitás feltételét elhagyjuk, akkor közönséges sokszögünk BB_1 átmérője a kettőnél — tetszőleges kicsivel — kisebb lehet (7. ábra).

Bogdán Zoltán, Cegléd



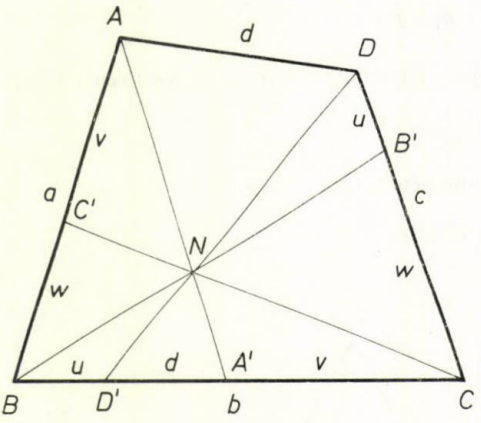
6. ábra



7. ábra

Megoldók száma: 5.

944. Melyek azok a síkbeli négyszögek, amelyeknek a csúcsain átmenő négy (nem feltétlenül különböző), a kerületet felező egyenes egy ponton halad keresztül?



8. ábra

Megoldás: Legyen $ABCD$ ilyen tulajdonságú. Az AA', BB', CC' és DD' felezzék a kerületet és egy közös N pontjuk legyen. Legyen $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ és $DA=d$. Feltehetjük, hogy

$$a+b \geqq c+d$$

és

$$b+c \geqq a+d.$$

Ekkor $C' \in AB$, $B' \in CD$, $A' \in BC$ és $D' \in BC$. Jelölje $BD'=u$, $A'C=v$, $CB'=w$ és $a+b+c+d=2s$. Így $BC+CB'=s=D'C+CD$, $DB'=u$, és hasonlóan $AC'=v$, $BC'=w$ és $D'A'=d$ (8. ábra).

Három eset lehetséges.

1. eset: $u \neq 0$, $v \neq 0$.

Alkalmazzuk az ABA' háromszög $C'C$ szelőjére *Menelaos* tételét (lásd: Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába 311—312. oldal)!

$$\frac{v}{w} \cdot \frac{b}{-v} \cdot \frac{A'N}{NA} = -1.$$

Ugyanígy $DD'C$ háromszög BB' szelőjére

$$\frac{-u}{b} \cdot \frac{w}{u} \cdot \frac{DN}{ND'} = -1,$$

vagyis $NDA\triangle \sim ND'A'\triangle$ amiből $AD=A'D'=d$ és $AD \parallel A'D'$ miatt $AD'A'D$ paralelogramma, tehát N felezi AA' és DD' szakaszokat azaz $b=w$. Mivel azonban $b+w=s$, így $2w=2b=s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$, tehát

$$b=\frac{a+c+d}{3}.$$

A négyszög tehát olyan trapéz kell legyen, melyben a hosszabbik alap a többi oldal számtani közepe. Könnyen látható, hogy az ilyen trapéz rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

2. eset: $u=v=0$.

Ekkor

$$a+b=c+d=s$$

és

$$a+d=b+c=s,$$

melyekből

$$a=c \quad \text{és} \quad b=d,$$

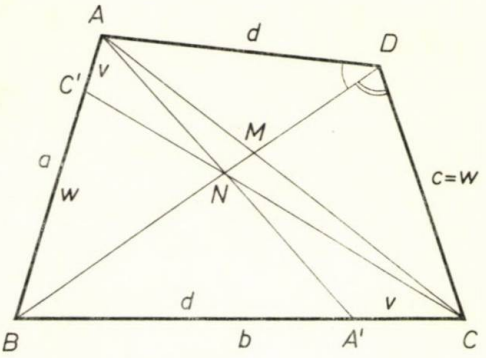
vagyis a négyszög paralelogramma kell legyen. Nyilvánvaló, hogy a paralelogramma átlói a feladatbeli tulajdonságú egyenesek.

3. eset: $u=0, v\neq 0$ (vagy megfordítva).

Most $c=w$ és

$$a+d=b+c=s.$$

Jelölje AC és BD közös pontját M (9. ábra). Alkalmazzuk az $ABA'\triangle$-re és a CC' szelőre, majd az $AA'C\triangle$-re és BM szelőre *Menelaos* tételét:



9. ábra

$$\frac{b}{-v}\cdot\frac{A'N}{NA}\cdot\frac{v}{c}=-1, \quad \text{így} \quad \frac{A'N}{NA}=\frac{c}{b}$$

és

$$\frac{AN}{NA'}\cdot\frac{-d}{b}\cdot\frac{CM}{MA}=-1,$$

amiből

$$\frac{CM}{MA}=\frac{b}{d}\cdot\frac{c}{b}=\frac{c}{d}.$$

E szerint az ACD háromszög DM szakasza, és így a négyszög BD átlója felezi az $ADC\sphericalangle$-et. Tükrözzük az $ABD\triangle$-et BD egyenesre! Az A tükörképe a D kezdőpontú DC félegyenesen kell legyen. Ha A tükörképe A' nem azonos C-vel, akkor $A'BD$ és CBD háromszögek egyike tartalmazza a másikat, s ezért a tartalmazott kerülete a kisebb, nem lehetne tehát $a+d=b+c$. Ebből viszont az következik, hogy a négyszög deltoid kell legyen. A deltoid pedig rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

Beláttuk tehát, hogy csakis a deltoidok, a paralelogrammák és a trapézok közül azok amelyeknek hosszabbik alapjuk a másik három oldal számtani közepe, rendelkeznek csúcson átmenő, egymást egy pontban metsző négy (nem feltétlenül különböző) kerületet felező egyenessel.

Bogdán Zoltán, Cegléd dolgozata alapján

Megoldók száma: 1.

A megoldók névsora (939—944.)

Alexics György, Budapest (941.); Ambrus Gabriella, Budapest (940—942.); Bagi Gábor, Barcs (939.); Bogdán Zoltán, Cegléd (939., 940., 942—944.); Imolya Sándor Hódmezővásárhely (939., 940., 942., 943.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (939., 940.); Illési Istvánné, Kiskunfélegyháza (939., 940.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (939—941.), Kun Péter, Szentendre (939.); dr. Major Pál, Budapest (939., 942., 943.); dr. Móritz Péter, Budapest (939.); Szánthó Gyula, Gyula (939., 940., 942.); K. Tóth György, Békéscsaba (940., 943.); Vermes Miklós, Budapest (939.); Zalán Péterné, Budapest (939., 940., 942., 943.).

5,50 Ft

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 5.* (83 001) 27,50
Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 6.* (83 020) ..... 39,—
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681) ..... 16,—
Munkaközösség: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (8178) 29,50
M. Bartal—Pálfalviné: *Tankönyvi útmutató a gimnáziumi II. osztályos matematika munkatankönyvhöz* (84 070) ..... 7,—
Bartal—Jakab—Kántorné: *Ismerkedés a kísérleteinkkel.* Új utak a matematika tanításában (52 522/4) 29,50
Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991) ..... 9,—
Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—
Máté László: *Sorozatok, sorok* (29 243) ..... 12,—
Vigassy Lajos: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben* (29 247) 9,50
Bognárné—Nemeztz—Tusnády: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253) ..... 17,—
Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép. Bevezetés az automaták tervezésébe* (29 184) 11,50
Hámori Miklós: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanuló számára (29 205) ..... 10,—
Kovács Győző: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika II. (29 217) 12,50
Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC* (52 659) ..... 35,—
Péter Rózsa: *Játék a végtelennel.* Matematika kívülállóknak (52 489) ..... 31,—
Élő matematika I. *Tanulmányok.* Szerkesztő: Gándor Endréné (92 347/1) ..... 18,—
Élő matematika 2. Jánossy—Tasnádi: *Valószínűségszámítás* (92 347/2) ..... 6,—
Élő matematika 3. Gergely—Hódi és mások: *A lánctörtekről a számítógépig* (92 347/3) 13,—
Élő matematika 4. Korányi Erzsébet: *Használjuk a differenciálszámítást?* (92 347/4) ... 18,50
Felvételi feladatok: matematika, fizika, szabadkézi rajz. Szerkesztette: Pálfai Pál (81 159/1) ..... 108,—
Dr. Scharnitzky Viktor: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából,* 1974—1976. IV. kötet (8158/IV.) 18,50
Magyar Felsőoktatási Intézmények Tájékoztatója (93 141) ..... 55,—

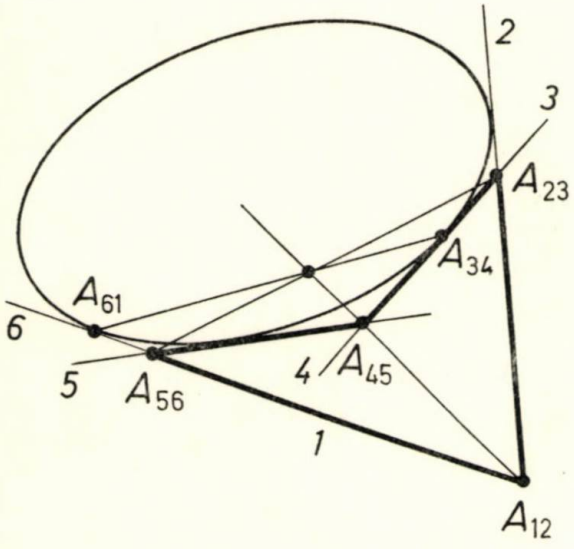
Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp. Múzeum krt. 3.)
a 4. Könyvesboltban (1051 Bp. Október u. 8.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



VERSEGHY KÖNYVTÁR

1981. augusztus * XXVIII. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS, ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, SZTANÓ TAMÁSNÉ, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21
Telefon: 211-200
81-2409 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 3,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Fonódi Gyula: Az általános iskolai matematika tantervi követelményeinek pontosításáról 97
Dr. Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (Kísérleti anyag. II. osztály 1. rész.) 102
Rábai Imre: Kétismeretlenes egyenletrendszerek 107
Dr. Máté László: Szakköri feladatok a számsorozatok tanításához 113
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 119

FELADATOK 120
Tájékoztatás az első nemzetközi statisztikatanítási konferenciáról III

СОДЕРЖАНИЕ

Фонодь Дюла: Об уточнении требований программ по математике в восьмилетних школах 97
Д-р Коллер Ласлоне: Система программных требований по математике для профтехучилищ (Экспериментальный материал, Кл. II., часть 1.) 102
Рабаи Имре: Система уравнений с двумя неизвестными 107
Д-р Мате Ласло: Задания для внеклассной работы по числовой последовательности 113
Конкурс Общества им. Яноша Бояи для учителей математики 119

ЗАДАЧИ 120
Сообщение о международном совещании по статистике III

INHALT

Fonódi, Gyula: Über die Präzisierung der Anforderungen des Mathematik-Lehrplans der Grundschule 97
Frau Marianne Koller (geb.: *Sátori*): Ein Anforderungssystem aus der Mathematik für die Berufsschulen (Versuchsmaterial, II. Klasse 1. Teil.) 102
Rábai, Imre: Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten 107
Dr. Máté, László: Fachzirkel-Aufgaben zum Unterricht der Zahlenfolgen 113
Der Wettbewerb der János Bolyai Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer 119

AUFGABEN 120
Information über die erste internationale Konferenz im Unterricht der Statistik III

FONÓDI GYULA
vezető szakfelügyelő
Debrecen

Az általános iskolai matematika tantervi követelményeinek pontosításáról

Az általános iskolai matematika-tanterv követelményeinek megfogalmazása nem hasonlít a hagyományos tanterv követelményeihez. A matematikát tanító nevelők, szaktanárok még ma is problémáznak a helyes értelmezésükön, de gondot jelent a szakfelügyelet számára is.

Mit jelenthet pl. az, hogy — „Tudják helyesen alkalmazni a *minden* és *van olyan* kifejezéseket és tagadásukat konkrét (?) esetekben"? Melyek lehetnek ezek a „konkrét" esetek? Vagy „tudják (?) megállapítani, hogy két szám közül melyik a nagyobb". Mi lehet ez a két szám? Természetes szám, egész szám? Bármilyen két racionális szám? Stb.

Hajdú-Bihar megyében 1976 óta működő, szakfelügyelőkből és kiváló tanárokból álló alkotó munkaközösség megpróbálta megadni a minimum követelmények egységes értelmezését. Felméréseket állítottak össze, pl. az 5. osztályosok számára évi hatot. A felmérések feladatsorait a minimum követelmények figyelembevételével, annak konkrét megjelölésével látták el. Természetesen ez még nem jelentette a tantervi követelmények pontosítását, hanem csakis egyfajta „feladatban történő konkretizálását".

Ezek a felmérési anyagok igen hamar elterjedtek a megyében, mivel a szaktanárok jónak, használhatónak tartották azokat. Csak mellékesen jegyzem meg, hogy tanmenet-javaslatokat is készítettünk, amelyekben az évi hat felmérés is meg van tervezve.

Ez a munka igen hasznosnak mutatkozott a későbbi időben. Egyik haszna az volt, hogy az új matematika-tanterv tanításának az eredményességét a megyében nyomon tudtuk követni az egységes felmérési anyag egységes pontozás alapján történő elemzésével. Másik nagy haszna pedig abban mutatkozott, hogy a matematika tananyagának tanítható-sága, annak a mélysége elemezhető lett a tényleges tanulói teljesítményeket vizsgálva, elemezve. Ez az elemzés alapot szolgáltatott számunkra ahhoz, hogy hogyan is kell értelmeznünk a követelményrendszerben az ilyen megfogalmazásokat, hogy pl. „ismerjék a tanulók...; tudjanak...; legyenek képesek...; legyenek jártasak...".

Ilyen értelmezésbeli finomságokra is fel kellett figyelnünk, hogy pl. az „ismerje a tizedes törtekben a számjegyek jelentését (értékét)" minimum követelmény és az „ismerje fel..." (más helyen) követelmény nem lehet azonos tartalmú, minőségű. Nem azonos a „felismerés" és „ismeret" szint, célszerű ezt a két fogalmat egymástól megkülönböztetni. Más minőségű tudást jelent pl. ha egy négyzetet felismert a tanuló, vagy — más síkidomokkal történő összehasonlítása alapján — a speciális tulajdonságok ismeretében indokolja a tanuló, hogy miért négyzet.

A különböző tudásszintek értelmezése az 5. osztályban

1. *A felismerési vagy ráismerési szint* minimumszint, amelyet a megnevezés szintjének is nevezhetünk. Ebben a szintben a tanuló — ha konkrét matematikai

probléma előtt áll — helyesen használja a matematikai fogalmakat. Például „ez egy síkidom, négyzet; ezek párhuzamos vagy merőleges egyenesek; ez természetes szám, tört szám, tizedes tört alakú szám; összeg, különbség, szorzat, hányados stb."

2. *Az ismereti szint* már jóval magasabb rendű az előzőnél. Az ismeretei alapján indokol a tanuló, pl. miért négyzet az, amit felismert, miért párhuzamosak vagy merőlegesek az egyenesek; miért tört szám, összeg stb? Ilyenkor az értelmes memória működik a tanulóban, a lényeges összefüggéseket használja az indokolásoknál, szabályokat, tételeket, törvényeket és definíciókat használ fel a konkrét megjelenési formák indokolására.

Véleményem szerint e két ismeretszint biztos tudása nélkül illúzió minden ennél magasabb rendű tanulói teljesítmény, produktív, alkalmazható tanulói tudás. Hogyan lehet pl. a négyzet tulajdonságainak ismerete nélkül négyzetet szerkeszteni, párhuzamosság fogalma nélkül párhuzamos egyeneseket rajzolni, osztás ismerete nélkül arányossági következtetéseket végezni?

Ezek a tudásszintek az ismeretszerzés folyamatában alakulnak ki és a gyakorlások során rögződnek a tanulókban. A kommunikációs és a kognitív képességek tervszerű fejlesztése nélkül nem épülhetnek ki a tanulókban.

Különösen fontos a tanulók ismeretei mellett a fogalmak helyes használatának képessége, a fogalmak alá-fölé és mellérendeltségi viszonyainak pontos, értelmes, tudatos használata. Ha a matematikai ismeretek nem alkotnak rendszert a tanulókban, akkor az ismeretekkel kapcsolatos fogalmakat sem tudják helyesen használni.

3. A „tudjanak a tanulók ... végrehajtani" megfogalmazású követelményeken olyan tudásszintet értek, amelyek az ismereteknek *gyakorolt, elemi vagy összetettebb alkalmazásait jelentik*. Ennek is több szintje van, amelyet már a gyakorlat igazolt.

a) Mechanikus szint a tanult művelet elvégzésében. Ez hasonlít leginkább a hagyományos készségszinthez. (A művelet itt nemcsak aritmetikai műveletet jelent, hanem pl. szerkesztést is.)

Ez — véleményem szerint — a kellő számú gyakorlással megszerezhető olyan képességeket jelent — pl. alapműveletekben, szerkesztésekben —, amelyek *gyorsan és pontosan* működnek a tanulókban, hasonló helyzeteket a tanuló szinte már rutinszerűen tud megoldani, nem ez jelenti számára a problémát. Mindezek a mechanizmus szintek jelentik a tanulók számára az *eszközöket* az igazi problémák megoldásához.

Szeretném tisztázni azt, hogy nem a régimódi, hagyományos és unalmas gyakorlásokra gondolok itt, amikor „mechanizmusok" kialakításáról szólok. (Erről később még lesz szó.) A mechanikus szinten azt értem tehát, hogy megfelelő gyorsan és pontosan kellene a tanulóknak bizonyos műveleteket elvégezniük egy optimális időtartamú gyakorlás során.

(Gyorsaság: életkornak megfelelő feladatmegoldás, műveletvégzés optimális idő alatt. Erről semmiféle tanuláslélektani kísérletek nem folytak tudomásom szerint, mivel csak felszínes megállapítások olvashatók arról, hogy a tanulók haladási üteme különböző; hogy legyen megfelelő számú gyakorlás; hogy differenciált képzéssel kell a felzárkóztatást megoldani stb. Ma a gyakorlati pedagógia alig, vagy nem is tudja figyelembe venni az ún. időfaktort, ami pedig szükséges az eredményes tanuláshoz. Ma a tanulók zöme nem azért nem képes a tananyagot elsajátítani, mert buta, hanem azért, mert *számára kevés* a tanulás és a gyakorlás időtartama, amiatt marad le, nem emészti meg és nem gyakorolja be a mechanizmusokat, nem érti meg az alkalmazásokat, s halmozódnak egyre a lemaradások!)

Kelemen László írja a *Pedagógiai*

Pszichológiában: „Bizonyos pszichikus folyamatok *rendszeres és tervszerű előidézése és gyakorlása* hoz létre a gyermekben strukturális változásokat, eredményez fejlesztést, alakít ki bizonyos szerkesztési sajátosságokat... Amíg a gyakorlás segíti a funkció és szerkezet fejlődését, addig a gyakorlás hiánya visszafejlődést, sorvadást eredményez nemcsak az értelmi élet és tanulás terén, hanem az érzelmi és akarati életben is."

Meg kell vizsgálni azt is, hogy a fogalmak hosszú időszakra tervezett tanítása célszerű-e a biztos fogalomalkotásban. Nem kellene-e befejezni pl. az 5. osztályban a műveletek tanítását természetes számkörben? (Osztás és szorzás természetes számmal is!)

b) Az előző mechanikus szintek eléréséhez, begyakorlásához szükségesek az ún. *konstruktív alkalmazások.*

Például a mechanikus „tudjanak tízes számrendszerben felírt számokat írásban összeadni, kivonni..." szint nem képzelhető el nyitott mondatok, szabályjátékok, szöveges feladatok stb. megoldása nélkül, miközben más, még magasabb rendű ismereteket is szerez a tanuló.

c) Az előzőnél is magasabb tudásszintet jelent a *„legyenek* jártasak..." meghatározás a „tudja..." kategórián belül.

Ez a szint jelenti véleményem szerint *a nem ismert típusú feladatok* megoldásának képességét a tanulók részéről, de ezek olyan feladatok, amelyeket a tanulók az előzőekben kimunkált mechanizmusokkal tudnak megoldani.

Ez a tudásszint nem azt jelenti, hogy a tanuló egy teljesen szokatlan, nem tanult, új műveletet kell, hogy alkalmazzon, kitaláljon a probléma megoldásához, hanem jelenti pl. a szöveges feladatok esetén a megoldási terv készítésében, a szerkesztési vázlat készítésében való jártasságot. Ez a lépés minden feladat megoldásában más, így azt mechanikusan begyakorolni nem lehet. Jártasság az ellenőrzésben; annak eldöntése, hogy a kapott eredmény megfelel-e a feltételeknek, a valóságnak. Tehát olyan szintje ez a tudásnak, amely szint ismert feladatok gyakorlása közben rögzül a tanulókban, és azokat új helyzetekben alkalmazza. Ezen a szinten rendelkezik a gyerek a részműveletek mechanizmusával, de pl. a műveletek sorrendjét, a megoldásmódok közül a legegyszerűbb kiválasztását minden esetben el kell döntenie, vagyis a változó körülmények között is képes a tanultakat alkalmazni.

4. Legmagasabb tudásszintnek tartom a „legyen képes a tanuló..." megfogalmazással kezdődő követelményszinteket.

Ezen a szinten ugyanis az összes, előző pontokban tárgyalt tudásszintek működnek, de mindezeken kívül magasabb szellemi tevékenységre is sor kerül. Ilyenek:

— Sejtések és cáfolások kimondása, bizonyítása, igazolása.

— Annak eldöntése, hogy igaz-e egy állítás vagy nem. Miért igaz, miért nem?

— Egyértelmű-e a feladat? Van-e benne ellentmondó adat?

— Lehet-e általánosítani a kapott összefüggést?

— Megoldások vizsgálata: egy megoldás; több megoldás; nincs megoldás stb.

Ahhoz, hogy a matematika-tanterv követelményeit valóban pontosítani lehessen, ezeknek a szinteknek a meggondolása elvileg nagyon fontos valamennyiünk számára.

Ezek után nézzük meg ilyen szempontból az *5. osztályos tananyag* egy témakörének követelményeit!

Számtan, algebra, függvények

1. Felismerés, ráismerés szintje

— Helyesen olvasson ki tört számot (tört alakút, tizedes tört alakút három tizedesjegyig, helypótló is lehet benne).

— Helyesen nevezze meg tört alakú szám esetén a számlálót és a nevezőt.
— Ismerje fel a különböző alakú (tört, tizedes tört, százalék stb.) számok között az egyenlő értékűeket.
— Helyesen olvasson ki negatív számot. Az adott számegyenesen jól helyezze el a negatív számokat is.
— Több megoldási terv közül ismerje fel a jót, illetve jókat (2 művelettel megoldhatók; esetleg felesleges adat is).
— Helyesen nevezze meg az aritmetikai kifejezések szerkezetét (pl. összeg; különbség; szorzat; hányados; szorzat, amelyiknek az egyik tényezője összeg).
— Koordináta-rendszerben ábrázolt grafikonról biztosan ismerje fel, hogy az ábrázolt összefüggés egyenes arányosság, fordított arányosság vagy egyik sem. A grafikonról jól olvassa le az adatokra legjellemzőbb tulajdonságokat.

2. Ismereti szint

— Értelmezze a leírt tizedes törtben a helyi és alaki értékeket. Értelmezze a tizedes tört alakot, mint 10, 100, 1000 nevezőjű tört számot. Értelmezze a tizedesvessző jelentését.
— Magyarázza meg pl. a $0{,}5=0{,}50=0{,}500$ egyenlőséget.
— Értelmezze a tört számlálóját és nevezőjét,
  — mint az egység egyenlő részekre való osztását;
  — mint két természetes szám hányadosát.
— Értelmezze a törtek egyszerűsítését, bővítését.
— Értse a tört átalakításának módját tizedes tört, százalék alakú számmá véges tizedes tört esetén.
— Értelmezze a negatív számot mint a pozitív szám ellentettjét, vagy mint a zérusnál kisebb számot.
— Indokolja a számegyenes segítségével a számok növekedését, illetve csökkenését (pozitív irány, negatív irány, a 0 helye).
— -100 és 100 közötti bármelyik egész szám helyét jól találja meg a számegyenesen. Állapítsa meg az adott számok nagyságrendjét a számegyenesen való helyükkel.
— Az $y=a\cdot x$ és $y=a/x$ alakú függvénykapcsolatról döntse el, hogy az egyik egyenes arányosság, a másik fordított arányosság. Értse, hogy az első esetben az összetartozó értékek hányadosa, a második esetben a szorzata állandó. Táblázatba foglalt adatok segítségével tudja megmagyarázni az összefüggéseket.

3. *a)* **Mechanikus szint** (számok, műveletek)

— Bármilyen hallott, vagy szöveggel leírt racionális számot írjon le helyesen:
természetes számot milliárdig;
tizedes törtet ezredig;
törtet 1000-nél nem nagyobb nevező esetében;
negatív számot (egészet és tört számot is);
ketted, negyed, ötöd, nyolcad, tized, század, ezred nevező esetén a tizedes tört és százalék alakot.
— Tízes számrendszerben felírt számmal, számokkal tudjon gyorsan és pontosan elvégezni műveleteket (tizedes törtekkel is).

1. *Összeadás*
— pozitív egészekkel és tört számokkal írásban, 100-as számkörben szóban is;
— negatív egészekkel -100 és 100 közötti számok esetében;

— alkalmazza az összeadás kommutatív és asszociatív tulajdonságát a műveletek ésszerűsítése érdekében.

2. *Kivonás*
— pozitív egészekkel és tört számokkal írásban, 100-as számkörben szóban is;
— negatív egészekkel −100 és 100 közötti számok esetében.

3. *Szorzás*
— pozitív egész számokkal (a szorzó is és a szorzandó is legfeljebb háromjegyű);
— a szorzó és a bennfoglaló tábla biztos használata;
— tizedes tört szorzása egész számmal (legfeljebb három jegy);
— tizedes tört szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel;
— a szorzás kommutatív és asszociatív tulajdonságainak alkalmazása a műveletek ésszerűsítése érdekében.

4. *Osztás*
— pozitív egész és tizedes tört osztása kétjegyű egésszel;
— egész és tizedes tört osztása 10-zel, 100-zal, 1000-rel.

Törtekkel gyorsan és pontosan végezze el a következő műveleteket:

1. *Összeadás*
— egyenlő nevezőjű törtekkel (a nevező nem nagyobb 100-nál);
— különböző nevezőjű törtekkel egyszerűbb esetben (pl. fél, negyed, nyolcad összeadása stb.).

2. *Kivonás*
— egyenlő nevezőjű törtekkel;
— különböző nevezőjű törtekkel egyszerűbb esetben.

3. *Szorzás*
— tört szorzása egész számmal a számláló szorzásával;
— tört szorzása, ha a szorzó egyenlő a nevezőjével (a számláló nem nagyobb 100-nál).

4. *Osztás*
— tört osztása egész számmal a számláló osztásával;
— egyszerűbb esetben — ha a számláló nem osztható az osztóval — a tört bővítésével $\left(\text{pl. } \frac{1}{2}:2=\frac{2}{4}:2=\frac{1}{4}\right)$.

b) **Konstruktív alkalmazások**

(Előzőek gyakorlásának „színterei".)
— Szabályjátékok egy, illetve két művelettel, ha adott a szabály.
— Egy, illetve két művelettel megoldható szöveges feladatok, főleg a mindennapi életből vett problémákkal.
— Mennyiségek kifejezése különböző mértékegységgel mérve.
— Egyenes és fordított arányossági feladatok megoldása következtetéssel. Az összetartozó értékpárok táblázatba való bejegyzése, és a számpároknak megfelelő pontok ábrázolása a koordináta-rendszerben.
— Műveletek sorrendje több műveletet tartalmazó feladatban; a zárójel szerepe.
— Százalékszámítási feladatok egyszerűbb esetei (következtetéssel).
— Terület-, kerületszámítási feladatok:
mért adatokkal a négyzet, téglalap, derékszögű háromszög területe, kerülete;
kocka és téglatest felszíne mért adatokkal.

c) **Jártassági szint feladatok megoldásában** (nemcsak ismert típusúak)

— Tudjon megoldani szöveges feladatokat nyitott mondattal vagy anélkül (két, három művelet esetén).

— Tudjon megoldani $a \cdot x + b = c$ típusú egyenleteket és pl. $a \cdot x + b \leqq c$ típusú egyenlőtlenségeket pozitív gyök esetében; tudják kijelölni a megoldáshalmazt; tudják ellenőrizni a megoldást.

— Szöveges feladat megoldásakor a következő kérdésekre tudjon válaszolni: milyen adatokat ismerünk; van-e lényegtelen adat; milyen adatra lenne még szükség; kell-e mértékegységet váltani; van-e többféle útja a megoldásnak; azok közül melyik az egyszerűbb? Hány megoldása van a feladatnak?

— Tudja alkalmazni a tanult azonosságokat a feladatok megoldásában.

— Táblázatba foglalt összetartozó értékpárokról nyitott mondatot, szabályt írjon fel.

— Tudjon egyszerűbb függvényeket ábrázolni koordináta-rendszerben; az egységet maga válassza; (pl. út—idő; út—sebesség; sebesség—menetidő; áru tömege—áru ára; munkaidő—munkások száma; téglalap oldalai, ha a terület állandó stb. mennyiségekkel kapcsolatban).

— Tudja a számsorozat valahányadik tagját megadni, ha ismeri az első 5—6 tagot. Egyszerűbb esetben írja fel a sorozatképzés szabályát.

A tantervi követelmények pontosítása nyilván másképpen is elkészíthető. Az itt leírtakat is csak tervezetnek tekintjük, amely a Hajdú-Bihar megyei pedagógusok tapasztalataira épül.

DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ
főelőadó
OPI

Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából

(Kísérleti anyag, II. osztály 1. rész.)

Az első évfolyam követelményrendszerében összefoglaltuk azokat a nevelési vonatkozásokat, amelyek mindhárom évfolyamon, így a másodikon is érvényesek. (Lásd A Matematika Tanítása 1979. 5. szám és 1980. 1. szám). Ezért itt csak azokat a nevelési lehetőségeket emeljük ki, amelyek az illető témával kapcsolatosan nagyobb hangsúlyt kapnak.

I. téma: **Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet** (kb. 21 óra)

Nevelési területek (feladatok)

A nagysági relációk a valóságban konkrét dolgok között állnak fenn. A relációk megvilágítása közben mutassuk meg a valóság és a matematika kapcsolatát. Ezt akkor érhetjük el a legjobban, ha nagyon sok konkrét esetet vizsgálunk meg.

Neveljük tanulóinkat gondolataik precíz megfogalmazására. A nagyobb, kisebb, ugyanannyi, legalább annyi, legfeljebb annyi, nem kisebb, nem nagyobb kifejezéseket a köznapi nyelvben is használjuk és nagyon sokszor ott sem megfelelően. Ezek pontos értelmének tudatosítása fejleszti kifejezőkészségüket.

A nagysági relációkkal jellemzett ponthalmazok vizsgálata az analógiás gondolkodást fejleszti, hiszen más körülmények közt is megmutatja bizonyos megálla-

pítások érvényességét. A vizsgálódás során nem matematikai problémákra is alkalmazható gondolatmenetet kapunk: keressük a megegyezőt a különböző területeken és pontosan meghatározzuk az eltérést is, hogy ennek segítségével meg tudjuk állapítani milyen határok közt alkalmazhatjuk az analógiát.

Az összefüggések megláttatására nevelünk, ha nem szakítjuk szét a kisebb, nagyobb, egyenlő fogalmát, hanem egységben tárgyaljuk ezeket (tehát nem választva szét mesterségesen az egyenleteket és az egyenlőtlenségeket).

Ugyancsak az analogikus gondolkodást és az összefüggések felismerésének készségét fejlesztjük, ha az egyenletek és egyenlőtlenségek grafikus megoldásakor a lineáris függvény tulajdonságait, a függvényábrázolást és az egyenlettel leírható problémákat szoros összefüggéseikben világítjuk meg.

Ebben a témakörben a pontos rajzok készítése, a figyelem összpontosítása (pl. egyenletek azonos átalakítása algebrai megoldás közben) szintén fokozott hangsúlyt kap.

Az önellenőrzés igényét és képességét is fejleszteni tudjuk, ha a kapott eredmények ellenőrzését következetesen megköveteljük.

A szöveges problémák alapján egyenletek felírása modellalkotásra nevel. Itt, a tanulókban azt is tudatosíthatjuk, hogy néha a problémát többféle modell is leírhatja.

Eközben a tanulókat arra is nevelhetjük, hogy tanuljanak meg egymás gondolatmenetébe beilleszkedni, kritika és önkritika nélkül semmilyen eredményt el nem fogadni.

A szöveges problémákhoz matematikai modell készítése, vagyis megoldásukra alkalmas egyenlet felírása végső soron önálló munkával történik. Hiszen akárhány egyenletet is írunk fel közösen, teljes analógia elképzelhetetlen. Sok, hasonló szövegű feladat egészen más modellt igényel, míg eléggé eltérőnek tűnő feladatokhoz ugyanaz a modell tartozik. Így végső soron, a tanulóknak el kell jutniuk az önálló modellalkotáshoz. (Ez természetesen igen nehéz, vannak tanulók, akik idáig soha nem jutnak el, de akkor ők nem is tudnak szöveges egyenletet megoldani. Szöveges feladatot egyenlettel megoldani vagy tud valaki, akkor önállóan tudja azt, vagy csak segítséggel tudja, de akkor valójában nem is tudja.) A szöveges problémák egyenlettel való megoldásában, tehát fokozott hangsúlyt kap az önálló munkára nevelés.

A tananyag elsajátítására vonatkozó követelmények

(Szöveg mellett húzott vonallal emeljük ki a minimum-követelményeket.)

Értsék a tanulók a „kisebb", „nagyobb", „ugyanannyi", „legalább annyi", „legfeljebb annyi" relációkat. Értsék, hogy az $a<b$ és $b>a$ ugyanannak a relációnak két különböző kifejezése. Értsék, hogy a „kisebb" nem ugyanazt jelenti, mint a „nem nagyobb" és a „nagyobb" nem ugyanazt, mint a „nem kisebb". ($a<b \neq a \leqq b$).

Konkrét adatok esetén helyesen le tudják írni a fennálló relációt. Tudják ábrázolni a számegyenesen az adott relációkat kielégítő számhalmazt. (pl. $1<k \leqq 3$ stb.)

Ismerjék a nyitott, zárt, egyik oldalról nyitott intervallum fogalmát. (Természetesen nem az elnevezést, hanem annak szemléletes értelmét ismerjék. Ezzel kapcsolatban vetődjön fel ismét a határérték gondolata, az irracionális szám körülhatárolásának gondolata és így a valós szám fogalmának további közelítése.) Értsék, hogy az $a<b$, $a=b$, $a>b$ relációkat külön-külön kielégítő számok halmaza együttesen a teljes valós számhalmaz, és ennek képe lefedi az egész számegyenest.

Tudjanak ábrázolni a síkban bizonyos nagysági relációkkal jellemzett ponthalmazokat, pl. egy ponttól vagy egy-egy egyenestől adott távolságra levő, adott távolságnál kisebb, nagyobb, nem kisebb, nem nagyobb távolságra levő pontok halmazát.

Tudjanak konkrét probléma alapján felírni és próbálgatással, vagy következtetés-

sel megoldani egyszerűbb egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket. (Pl. legalább hány darab 10×10 cm-es csempére van szükségünk egy 25 m^2-es falfelület csempézésére? Vagy: legfeljebb hány szendvicset tudunk készíteni 2 kg kenyérből, ha egy szendvicshez 6 dkg kenyeret használunk fel? stb.) Értsék, hogy egyenlőtlenségnek, egyenletnek egyaránt lehet egy vagy több, esetleg végtelen sok megoldása, és lehetséges, hogy egyáltalán nincs megoldása.

Ismerjenek példát olyan esetekre is, amelyekben a problémát leíró egyenletnek, vagy egyenlőtlenségnek van megoldása, de a megoldás nem elégíti ki a problémát. (Pl. egy kétjegyű szám első számjegye 1-gyel nagyobb, mint a második. A szám kétszerese egyenlő az egyesek helyén álló szám harmincszorosával. Melyik ez a szám? A felírható $10(x+1)+x=15x$ egyenlet eredménye: $x=2{,}5$, ez azonban nem megoldása a problémának.)

Tudják konkrét szöveges feladaton alkalmazni a tanultakat, vagyis helyesen értékelni a feladat megoldása során kapott eredményt.

Ismerjék az „azonosság" fogalmát. Tudjanak lineáris függvényeket ábrázolni Descartes-féle koordináta-rendszerben. Értsék, hogy két lineáris függvényt ábrázolva ugyanabban a koordináta-rendszerben két olyan egyenest kapunk, amelyek vagy metszik egymást, vagy párhuzamosak egymással, vagy egybe esnek.

Értsék, hogy a metszéspont létezése mit jelent (mindkét egyenesen van olyan pont, amelynek koordinátái megegyeznek).

Értsék, hogy bármely lineáris egyenlet vagy egyenlőtlenség két oldala tekinthető lineáris függvénynek.

Tudják ezeket közös koordináta-rendszerben ábrázolni. Értsék, hogy a metszéspont (ha van ilyen) abszcisszája az egyenlet megoldása.

Ismerjék fel, hogy a metszésponthoz tartozó abszcisszaértéknél kisebb, illetve nagyobb abszcisszaértékekhez tartozó ordináták közt, milyen nagysági reláció áll fenn.

Tudjanak ennek alapján grafikusan megoldani egyszerűbb, lineáris egyenleteket és egyenlőtlenségeket (alkalmazás szint) (pl. $3x+5=2x-3$, vagy $x-1=2x$). Értelmezni tudják a grafikus megoldást akkor is, ha az egyenlőség vagy az egyenlőtlenség egyik oldalán konstans áll (pl. $3x-1=5$ vagy $x+3 \leqq 0$ stb.).

Tudjanak összetettebb, lineáris egyenletekre, illetve egyenlőtlenségekre vezető feladatokat grafikusan megoldani. Az „összetettebb" fogalmának megítélését a tanárra bízzuk. Általában összetettebb egyenletnek, illetve egyenlőtlenségnek tekintjük azokat, amelyeket 3-4 algebrai lépésnél többel, esetleg tört együtthatók segítségével tudunk leírni.

$$\text{Pl.: } \frac{3x-1}{2}-5(x+2)>\frac{x+1}{3}.$$

Ismerjék fel az egyenlet megoldhatósága és a kapott grafikon közti kapcsolatot (párhuzamos egyenespár, egybeeső egyenesek, metsző egyenespár).

Ismerjék fel az egyenlőtlenség megoldhatósága és a kapott grafikon közti összefüggést.

Alkalmazás szinten tudják az egyenletek mérlegelven alapuló algebrai megoldását. Alkalmazás szinten tudják az ehhez szükséges azonosságokat: zárójelek felbontását, összevonást, összeg szorzását, osztását. Tudják eredményeiket az egyenletbe, illetve egyenlőtlenségbe helyettesítve ellenőrizni.

Tudjanak egyszerűbb szöveges feladatok alapján egyenleteket felírni. (Itt az „egyszerűbb" elbírálását a kartársakra kell bíznunk, hiszen az egyszerűség a probléma megfogalmazásától függ elsősorban. Sokszor igen nehéz probléma egészen egyszerű

algebrai formulához vezethet. Általában azonban akkor tekintjük egyszerűbbnek a problémát, ha egy-két algebrai lépéssel leírható. Pl. egy szám 5-tel kisebb, mint a másik, a két szám összege 31. Melyik ez a két szám?)

Bonyolultabb, összetettebb szöveges problémák megoldására vezető egyenletek felírása.

Ismerjék fel, hogy szöveges egyenletek megoldását nemcsak az egyenletbe, hanem a szövegbe helyettesítve is ellenőrizni kell. Az egyenletek megoldásának ellenőrzését ilyen módon mindig végezzék el (alkalmazási szint).

II. téma: **Síkgeometria**

Nevelési területek (feladatok)

A halmazokról tanultakat most ponthalmazokra alkalmazzuk. Szintén az analogikus gondolkodás fejlesztésére van módunk.

A rajzok készítése pontosságra, figyelemre nevel és fejlesztheti az esztétikai érzéket.

A hasonlóság és egybevágóság, ezek összefüggése alkalmas arra, hogy az általánosabból a speciálisabb felismerésére neveljük a tanulókat.

Az egyes geometriai tételek kimondása és ezek indoklása, esetleg bizonyítása a logikus gondolkodást fejleszti. A szerkesztési feladatok elvégeztetése közben is állandóan indokoltassuk az egyes lépéseket. Az itt szereplő bizonyítások természetesen nem részei egy szigorú axiomatikus rendszernek, de arra alkalmasak, hogy logikus következtetésre szoktassuk tanulóinkat.

A tananyag elsajátítására vonatkozó követelmények

Értsék a ponthalmaz fogalmát. Ismerjék a ponthalmazok megadásának különböző módjait.

Értsék ponthalmazok esetében is a részhalmaz fogalmát és azt, hogy mit jelent két ponthalmaz közös része.

Értsék — konkrét esetben — hogy mi tartozik két ponthalmaz egyesítéséből kapott halmazba.

Ezek alapján tudjanak értelmezni bizonyos mértani helyeket: szakaszfelező merőleges, szögfelező, körvonal, adott egyenestől adott távolságra levő pontok, adott ponttól és egyenestől adott távolságra levő pontok stb. El tudjanak végezni bizonyos alapszerkesztéseket: szakasz felezése, egyenes adott pontjában merőleges állítása, külső pontból adott egyenesre merőleges bocsátása, szög felezése. Értsék a hasonlóság fogalmát: hasonló alakzatok bármely két megfelelő szakaszának aránya egyenlő.

Értsék, hogy az egybevágóság a hasonlóság speciális esete (ilyenkor az arány értéke: 1).

Értsék, hogy két hasonló alakzat közül az egyikben bármely két szakasz aránya megegyezik, a másikban rajzolt két megfelelő szakasz arányával.

Ismerjék a háromszögek hasonlóságának és egybevágóságának alapeseteit.

Ismerjék fel mindezek alapján a hasonló, illetve egybevágó alakzatokat. Az egybevágóság tulajdonságai alapján tudjanak háromszögeket szerkeszteni egyszerűbb esetekben. (Adott 3 oldal, 2 oldal és a közbezárt szög, 1 oldal és a rajtafekvő két szög, 2 oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög.)

Tudjanak összetettebb szerkesztési feladatokat is elvégezni. (Pl. 2 oldal és az egyikhez tartozó súlyvonal segítségével háromszöget szerkeszteni, vagy általános négyszöget 3 oldalból és az adott oldalak által bezárt 2 szögből stb.).

Tudjanak egyszerűbb bizonyítási feladatokat elvégezni hasonlóság vagy egybe-

vágóság felhasználásával (pl. egy trapéz két párhuzamos oldala közül egyik kétszer akkora, mint a másik, milyen arányban osztja egymást a két átló? stb.).

Ismerjék a háromszögek nevezetes vonalait és pontjait: súlyvonal, szögfelező, magasságvonal, háromszög köré, illetve háromszögbe írható kör középpontja, súlypont, magasságpont.

Ismerjék ezek tulajdonságait. Meg tudják rajzolni adott háromszögben ezeket a nevezetes pontokat és vonalakat (tompaszögű háromszögek esetében is.)

Értsék a háromszögek nevezetes pontjaira, illetve vonalaira vonatkozó tételeket és azok bizonyítását is.

III. téma: **Pozitív, egészkitevőjű hatványok**

Nevelési területek (feladatok)

Ebben a témakörben az általánosan érvényes nevelési feladatok mellett a leleményességre, az egyszerűsítési lehetőségek megláttatására nevelhetjük tanulóinkat. Kézzel fogható számukra, hogy bizonyos azonos átalakításokkal igen jelentősen megkönnyíthetik munkájukat. Tapasztalataink szerint ezen a téren igen sok a probléma. Nem is keresik az egyszerűsítési lehetőségeket, nekilátnak bonyolult kifejezésekkel, vagy igen nagy számokkal műveleteket végezni — és persze ezzel a hibalehetőség megnő, így pontatlan eredményeket kapnak.

A tananyag elsajátítására vonatkozó követelmények

Értsék, mit jelent egy egész szám többszöröse, osztója. Ismerjék a törzsszám, összetett szám, valódi osztó, összes osztó, közös többszörös, közös osztó, viszonylagos törzsszám, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös fogalmát.

Tudjanak 2-3 jegyű számokat törzstényezőikre bontani.

Ismerjék fel, hogy egy összetett szám a sorrendtől eltekintve csak egyféleképpen bontható fel törzstényezők szorzatára.

Ismerjék a hatvány, hatványalap és hatványkitevő elnevezéseket. Értsék mit jelent hatványozni pozitív egész kitevő esetén.

Ismerjék a hatványokkal végezhető műveletekre vonatkozó azonosságokat és tudják ezeket alkalmazni konkrét feladatokban.

$$\text{Pl.: } \frac{2^3}{2^2} = 2, \quad \text{vagy} \quad 3^2 \cdot 2^2 = 6^2 \quad \text{stb.}$$

Tudjanak ennek ismeretében bizonyos műveleteket célszerűbben elvégezni.

Pl. Mennyi $8^3 \cdot 125^3$, ami $(8 \cdot 125)^3 1000^3$, vagy

$$\frac{2187^3}{243^3}, \quad \text{ami} \quad \left(\frac{3^7}{3^5}\right)^3 \quad \text{stb.)}$$

Ismerjék és alkalmazni tudják a kéttagúak szorzására, a két tag négyzetére vonatkozó azonosságot és a két tag összegének és különbségének szorzatára vonatkozó azonosságot.

Ismerjék a kiemelés fogalmát és ki tudják emelni több tagból a közös tényezőket.

Tudjanak összetettebb algebrai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni a tanult azonosságok felhasználásával.

$$\left(\text{Pl.: } \frac{a^3+3a^2-a-3}{a^2-1} = \frac{a^2(a+3)-(a+3)}{a^2-1} = \frac{(a+3)(a^2-1)}{a^2-1} = a+3, \text{ ha } a \neq 1\right).$$

RÁBAI IMRE
egyetemi adjunktus
Budapesti Műszaki Egyetem

Kétismeretlenes egyenletrendszerek

Az egyetemi felvételin, az egyetemi tanulmányok során a tanulók kétismeretlenes egyenletrendszereket is oldanak meg. Az egyenletrendszerek megoldása igen sok problémát vet fel, amelyeknek csak egy részével foglalkozik a középiskola, s talán nem is elég mélyen. A cikkben leírtak egy részét célszerű beépíteni a tananyagba, egy másik részét az ismétlés, rendszerezés során az érettségi előtt érdemes megjegyezni, míg a nehezebb problémák megbeszélésére szakkörön, egyetemi felvételire előkészítő órákon kerülhet sor. A cikknek egy része természetesen csak nekünk, tanároknak szól.

Feladat:
Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

P.1.
$$\left.\begin{aligned} x+y+\sqrt{x+y} &= 6, \\ x^2+y^2 &= 10. \end{aligned}\right\}$$
(Egyetemi felvételi feladat.)

P.2.
$$\left.\begin{aligned} x^2y^2(12-4x-3y) &= 0, \\ x^3y(8-2x-3y) &= 0. \end{aligned}\right\}$$
(Egyetemi feladat.)

P.3.
$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2 &= 2(x+y), \\ x^2+y^2 &= 5(x-y). \end{aligned}\right\}$$
(Egyetemi felvételi feladat.)

P.4.
$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2 &= 100, \\ 24(a+b) &= 7ab, \end{aligned}\right\}$$
$$a>0, \quad b>0.$$
(Egyetemi felvételi feladat.)

P.5.
$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= \frac{8}{x^2}, \\ x+2y &= \frac{8}{y^2}. \end{aligned}\right\}$$
(Egyetemi feladat.)

P.6.
$$\left.\begin{aligned} \sin^3 x &= \frac{1}{2}\sin y, \\ -\cos^3 x &= \frac{1}{2}\cos y. \end{aligned}\right\}$$
(Egyetemi felvételi feladat.)

P.7.
$$\left.\begin{aligned} xy &= 4, \\ \lg^2 x+\lg^2 y &= 10\lg^2 2. \end{aligned}\right\}$$
(Egyetemi felvételi feladat.)

P.8.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y &= 2, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y &= 2. \end{aligned}\right\}$$

(Egyetemi felvételi feladat.)

Tekintsünk át néhány alapvető fogalmat!

Az $f(x; y)=0$ kétismeretlenes egyenlet megoldásai a valós számok körében olyan $x=a, y=b$ $(a, b \in \mathbf{R})$ számpárok, amelyekre $f(a; b)=0$.

Az $(a; b)$ számpárok jelentése az $f(x; y)=0$ egyenlet grafikonja pontjainak koordinátái.

Legyen az $f(x; y)=0$ egyenletet kielégítő számpárok halmaza F, a $g(x; y)=0$ egyenletet kielégítő számpárok halmaza G, ahol F és G az f és g függvények közös értelmezési tartományának részhalmaza! Kereshetjük a két egyenlet közös megoldásait, amelyek az egyik egyenletnek is *és* a másik egyenletnek is megoldásai, vagyis az $F \cap G$ halmazt. Azt mondjuk, hogy ekkor az

$$\left.\begin{aligned} f(x; y) &= 0, \\ g(x; y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(konjunktív) egyenletrendszert kell megoldani. (Ekkor a kapcsos zárójeles jelölést használjuk).

(Kereshetjük azokat a megoldásokat, amelyek a két egyenlet közül legalább az egyiknek megoldásai, vagyis az $F \cup G$ halmazt. Azt mondjuk, hogy ekkor az

$$\left.\begin{aligned} f(x; y) &= 0, \\ g(x; y) &= 0 \end{aligned}\right]$$

(diszjunktív) egyenletrendszert kell megoldani. (Ekkor a szögletes zárójeles jelölést használjuk.)

Az egyenletekhez hasonlóan az egyenletrendszereknél is beszélhetünk ekvivalenciáról.

Az

$$\left.\begin{aligned} f_1(x; y) &= 0, \\ g_1(x; y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

és az

$$\left.\begin{aligned} f_2(x; y) &= 0, \\ g_2(x; y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

egyenletrendszereket ekvivalensnek mondjuk, ha gyökrendszereik megegyeznek, azaz $F_1 \cap G_1 = F_2 \cap G_2$. (Természetesen az f_1, g_1, f_2, g_2 függvényeket az értelmezési tartományuknak csak a közös részén tekintjük.)

A (2) egyenlet az (1) egyenletnek következménye, ha $F_1 \cap G_1 \subseteq F_2 \cap G_2$, azaz az (1) minden megoldása (2)-nek is megoldása.

Igazolhatók a következő állítások, amelyeket egyenletrendszerek megoldása során gyakran alkalmazunk.

T.1. Ha az $f_1(x; y)=0$ és az $f_2(x; y)=0$ egyenletek ekvivalensek, akkor az

$$\left.\begin{aligned} f_1(x; y) &= 0, \\ g_1(x; y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{és az} \quad \left.\begin{aligned} f_2(x; y) &= 0, \\ g_1(x; y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerek is ekvivalensek.

T.2. Tekintsük a következő egyenletrendszereket:

$$\left.\begin{aligned} f(x;y)&=0,\\ g(x;y)&=0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} f(x;y)&=0,\\ f(x;y)+g(x;y)&=0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} f(x;y)-g(x;y)&=0,\\ g(x;y)&=0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x;y)&=0,\\ af(x;y)+bg(x;y)&=0, \end{aligned}\right\}$$

ahol a tetszőleges, $b\neq 0$ valós szám. Az egyenletrendszerek ekvivalensek!

Egyenletrendszerek megoldása során az egyenletek egyik oldalán levő kifejezéseket bizonyos esetekben célszerű összeszorozni, illetve elosztani egymással.

T.3. A következő egyenletrendszerek ekvivalensek.

a) $$\left.\begin{aligned} f_1(x;y)&=a,\\ f_2(x;y)&=b, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)}=\frac{a}{b},\\ &b\neq 0 \quad \text{és} \quad f_2(x;y)=b. \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} f_1(x;y)&=g_1(x;y),\\ f_2(x;y)&=g_2(x;y) \end{aligned}\right\} \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned} &f_1(x;y)f_2(x;y)=g_1(x;y)g_2(x;y),\\ &f_2(x;y)=g_2(x;y). \end{aligned}\right\}$$

T.4. Tekintsük a következő egyenletrendszereket:

a) $$\left.\begin{aligned} f_1(x;y)&=g_1(x;y),\\ f_2(x;y)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (1) \quad \text{és} \quad \left.\begin{aligned} f_1^2(x;y)&=g_1^2(x;y),\\ f_2(x;y)&=0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

b) $$\left.\begin{aligned} f_1(x;y)&=a,\\ g_1(x;y)&=b, \end{aligned}\right\} \quad (3) \qquad \text{és} \qquad \left.\begin{aligned} &f_1(x;y)g_1(x;y)=ab,\\ &\text{ahol} \quad ab\neq 0 \quad \frac{f_1(x;y)}{g_1(x;y)}=\frac{a}{b}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Az (1) egyenletrendszernek a (2), a (3) egyenletrendszernek a (4) következménye!

(*Megjegyzés.* Az, hogy az (1) egyenletrendszernek a (2) következménye, az nem zárja ki azt, hogy egyes esetekben a két egyenletrendszer ekvivalens legyen. Ez most az *a)* esetben akkor következik be, ha az $f_1(x;y)=-g_1(x;y)$ egyenletnek nincs $f_2(x;y)=0$ egyenlettel közös megoldása.)

T.5. Tekintsük az

$$\left.\begin{aligned} f(x;y)&=0,\\ g(x;y)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (1) \quad \text{és az} \quad \left.\begin{aligned} a_1(x;y)f(x;y)+b_1(x;y)g(x;y)&=0,\\ a_2(x;y)f(x;y)+b_2(x;y)g(x;y)&=0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

egyenletrendszereket! Az (1) egyenletrendszer akkor és csakis akkor ekvivalens a (2) egyenletrendszerrel, ha

$$\begin{vmatrix} a_1(x;y) & b_1(x;y) \\ a_2(x;y) & b_2(x;y) \end{vmatrix} \neq 0,$$

ahol $(x;y)\in F\cap G$.

T.6. *a)* Az $f_1(x;y)f_2(x;y)=0$ egyenlet megoldásai $F_1\cup F_2$, azaz azok az (x_0,y_0) számpárok, amelyek legalább az egyik $f_i(x;y)=0$ $(i=1,2)$ egyenletnek megoldásai.

(Az egyenlet

$$\left.\begin{aligned} f_1(x;\,y) &= 0,\\ f_2(x;\,y) &= 0 \end{aligned}\right]$$

egyenletrendszer alakjában is írható.)

b) Az

$$\begin{aligned} f_1(x;\,y)\,f_2(x;\,y) &= 0,\\ g(x;\,y) &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldáshalmaza.

$$(F_1 \cap G) \cup (F_2 \cap G) = (F_1 \cup F_2) \cap G.$$

(Az egyenletrendszer a következő módon is írható:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} f_1(x;\,y) &= 0,\\ g(x;\,y) &= 0. \end{aligned}\right]\\ &\left.\begin{aligned} f_2(x;\,y) &= 0,\\ g(x;\,y) &= 0. \end{aligned}\right] \end{aligned}\right\})$$

(Az egyenletben, az egyenletrendszerben többtényezős szorzat is szerepelhet.)

T.7. Az

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x),\\ g(x;\,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x),\\ g\big(x;\,f(x)\big) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

egyenletrendszerrel. (A helyettesítés módszere.)

T.8. Ha

$$f(x;\,y) = f_1\big(u(x;\,y),\,v(x;\,y)\big)$$

és

$$g(x;\,y) = g_1\big(u(x;\,y),\,v(x;\,y)\big),$$

akkor az

$$\left.\begin{aligned} f(x;\,y) &= 0,\\ g(x;\,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

egyenletrendszer az

$$u(x;\,y) = u,\; v(x;\,y) = v$$

új változók bevezetésével az

$$\left.\begin{aligned} f_1(u;\,v) &= 0,\\ g_1(u;\,v) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

egyenletrendszerre vezethető vissza. Ha a (2) megoldásai

$$u = u_1,\, v = v_1;\; u = u_2,\, v = v_2;\; \ldots;\; u = u_k,\, v = v_k,$$

akkor az (1) egyenletrendszer megoldásait az

$$\left.\begin{aligned} u(x;\,y) &= u_1,\\ v(x;\,y) &= v_1, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} u(x;\,y) &= u_2,\\ v(x;\,y) &= v_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots, \quad \left.\begin{aligned} u(x;\,y) &= u_k,\\ v(x;\,y) &= v_k, \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerek megoldásainak egyesítése adja. (Az új változók bevezetésének módszere.)

A *T*.6. állítás a *P*.2. és a *P*.3. feladat megoldásához közvetlen segítséget ad, míg a *P*.1. és a *P*.4. a *T*.8. alkalmazásával oldható meg. Mire hívjuk fel tanulóink figyelmét, azaz milyen gyakorlati tanácsokat adhatunk?

G.1. A megismert helyettesítő módszerrel és az egyenlő együtthatók módszerével kísérletezhetünk.

G.2. Új változókat vezethetünk be. (Ezzel például egyes exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenletrendszereket algebrai egyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza.)

G.3. *a)* Az egyenletrendszer egyes egyenleteit megpróbálhatjuk a nullára redukálás után szorzattá alakítani (majd a *T*.6 *b)*-t alkalmazni).

b) Az egyenletrendszer valamelyik egyenlete egy kifejezésére nézve másodfokú lehet. (Ekkor új változót is lehetne bevezetni. A *P*.1. első egyenlete $\sqrt{x+y}$-ra másodfokú!)

Megjegyzés: Ha a másodfokú egyenletnek van valós megoldása, akkor természetesen a nullára redukálás után szorzattá lehet alakítani.

G.4. Az egyenletekben szereplő függvényekre alkalmazhatunk azonosságokat, speciális függvénytulajdonságokat. (Exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenletrendszerek megoldása során ezekre gyakran sor kerülhet. Alkalmazhatjuk az exponenciális és a logaritmus függvény szigorúan monoton tulajdonságait.)

Bizonyos speciális egyenletek, egyenletrendszerek esetén a specialitásnak megfelelő tanácsokat adhatunk.

G.5. Kétismeretlenes szimmetrikus egyenletrendszer esetén az $x+y=a$, $xy=b$ új változókat vezethetjük be. (A *P*.1. és *P*.4. feladatoknál alkalmazható: Lásd még: A Matematika Tanítása. 1959/1. 17. oldal. Másodfokú egyenletrendszerek.)

Néhány további gondolat

1. Megismert módszereket más típusú feladatokra is alkalmazhatjuk. (Az $x=x(t)$, $y=y(t)$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe esetén a paraméter egyes esetekben kiküszöbölhető.) A *G*.4. tanács alkalmazásával a *P*.6. megoldható. Ugyanis a

$$\left.\begin{aligned} 4\sin^6 x &= \sin^2 y, \\ 4\cos^3 x &= \cos^2 y \end{aligned}\right\}$$

(*T*.4.) egyenletrendszerből (*T*.2.) alkalmazásával a

$$\left.\begin{aligned} 4(\sin^6 x+\cos^6 x) &= 1, \\ 4\sin^6 x &= \cos^2 y \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer következik.

$$\left(\sin^6 x+\cos^6 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x).\right)$$

2. Az egyenletrendszer ismeretleneinek és egyenleteinek száma nem kell, hogy megegyezzen.

Az $\left.\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ g(x) &= 0 \end{aligned}\right\}$ illetve az $\left.\begin{aligned} f(x;\,y) &= 0, \\ g(x;\,y;\,z) &= 0 \end{aligned}\right\}$

egyenletrendszerek megoldásait is kereshetjük.

Például szolgáljanak a következő egyetemi felvételi feladatok.

$$a)\quad \left.\begin{aligned}\sin \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} &= 0,\\ \sin \sqrt{\log_{\sqrt{2}} x} &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad b)\quad \left.\begin{aligned} xy &= 1,\\ x+y-\cos^2 z &= -2.\end{aligned}\right\}$$

Természetesen az $f(x; y)=0$ kétismeretlenes egyenlet is „egyenletrendszernek" tekinthető.

a) $x+\frac{1}{x}=2\cos y$;

b) Egy háromszög területe: $T=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$. Határozzuk meg a háromszög szögeit!

Itt érdemes megjegyezni, hogy az $ax+by=c$ egyenletet kielégítő számpárokat célszerű paraméteres egyenletrendszerrel megadni. Ezzel kapcsolatot teremthetünk az egyenes egyenlete, paraméteres egyenletrendszere és paraméteres vektoregyenlete között. Sőt ezáltal előkészítjük tanulóinkat a lineáris egyenletrendszerek megoldása vektoros felírására! Például:

Az

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 1,\\ 2x+4y &= 2\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása. $y=t$ $(t\in\mathbf{R})$, $x=1-2t$, azaz az $(1-2t, t)$ alakú számpárok, ami

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix},$$

alakban írható. Ez az $x+2y=1$ egyenletű egyenes egy paraméteres vektoregyenlete.

3. Egyes esetekben egyenletek megoldását új változók bevezetésével egyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza. Például: $\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7$. Legyen $\sqrt{x+5}=u$ $(u\geqq 0)$ és $\sqrt{20-x}=v$ $(v\geqq 0)$.

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2 &= 25,\\ u+v &= 7.\end{aligned}\right\}$$

Ha $u=4$ és $v=3$, akkor $x=11$, ha $u=3$ és $v=4$, akkor $x=4$, és ezek valóban megoldások.

4. Elemi matematikai példatárokban található egyenletrendszerekkel gyakoroltathatjuk a módszereket.

A *P.*5. egyenletrendszerre érdemes visszatérni. A két egyenlet kivonása, majd átalakítása után az $(x-y)(x^2y^2+8(x+y))=0$ egyenlethez jutunk, ami az $x-y=0$ egyenlettel ekvivalens, hiszen $x^2y^2>0$ és $x+y=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)>0$. Így *P.*5. a

$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= \frac{8}{x^2},\\ x-y &= 0\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerrel ekvivalens.

A

$$\left.\begin{aligned} 2x^3+x^2y &= 8,\\ 2y^3+xy^2 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

alakból a két egyenlet kivonása után az $(x-y)(2x^2+3xy+2y^2)=0$ egyenlethez jutunk, amiből szintén $x-y=0$. Az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

$$x = y = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}.$$

DR. MÁTÉ LÁSZLÓ
egyetemi docens
Budapesti Műszaki Egyetem

Szakköri feladatok a számsorozatok tanításához

A szakköri foglalkozások tágabb teret adnak a tanulók kreativitásának, mint a szokásos iskolai órák. A középiskolák III. és IV. osztályaiban ezenkívül a szakkör szerepe az is, hogy hidat verjen a középiskolai és felsőfokú matematikai tanulás között. Erre a számsorozatok témaköre kiválóan alkalmas, mivel tanításának időpontja éppen a két iskolatípus találkozására esik.

A számsorozatok oktatása kétirányú. Az egyik: a sorozatokban rejlő szabályosságok felfedezése és matematikai formába öntése. A másik: annak vizsgálata, hogyan viselkednek a sorozat elemei „nagy n esetén". Az első problémakör a tanulók kreativitását, játékos alkotókészségét fejleszti; a második problémakör a határérték fogalmát, a felsőfokú matematika egyik központi fogalmát készíti elő.

A következő összeállításban 32 feladat szerepel, amelyeket az adott sorrendben és minimális összekötő szöveggel, alkalmas bevezetőnek tartok rekurzív sorozatok tanulmányozására.

Fibonacci-sorozat

A rekurzív sorozatok története a középkorba nyúlik vissza. Kezdetének a neves olasz matematikus, FIBONACCI azóta híressé vált példáját tekinthetjük, amely egy 1228-ban kiadott könyvében található. A példa így hangzik:

Mennyire szaporodik el egy nyúlpár egy év alatt, ha minden nyúlpár havonként egy új párral szaporodik és a nyulak kéthónapos korukban ivarérettek?

A szaporodás menetét a következő táblázatból olvashatjuk le:

Hónapok száma	0	1	2	3	4	5	6	7	...	12
I. Ivarérett nyulak száma	1	1	1	2	3	5	8	13		
II. Ivadékok száma	—	—	1	1	2	3	5	8		
III. Összesen	1	1	2	3	5	8	13	21		?

Figyeljük meg a következő szabályosságokat!

a) Az I. sorozat $(n+1)$-edik eleme megegyezik a III. sorozat n-edik elemével.

b) A III. sorozatot két elemmel „előretolva", megkapjuk a II. sorozatot.

A III. sorozatban rejlő szabályosságot a következő formulával adhatjuk meg:

Ha a nyulak száma az n-edik hónap végén F_{n+1} pár, akkor

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1,$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

az $\{F_n\}$ sorozatot *Fibonacci-sorozatnak* nevezzük.

Feladatok

1. Töltsük ki a fenti táblázat hiányzó részét a 8. hónaptól a 12-ig. Milyen szám áll a $\boxed{?}$ helyén? Tudunk-e erre válaszolni anélkül, hogy kitöltenénk a táblázat összes rovatát?

2. Melyik a következő sorozat 12-edik eleme

$$a_1 = 1; \; a_{n+1} = 2a, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Tudunk-e a kérdésre válaszolni anélkül, hogy ismernénk a sorozat előző 11 elemét?

3. Vizsgáljuk meg a kapcsolatot az $\{a_n\}$ és az $\{F_n\}$ sorozat között. Ha a_{n+1} a nyulak száma az n-edik hónap végén, akkor milyen szaporodási menetet fejez ki az $\{a_n\}$ sorozat?

4. Ellenőrizzük a következő formulát

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n = 1, 2, \ldots$$

5. Vizsgáljuk meg, van-e olyan $\{a_n\}$ *mértani* sorozat, amely teljesíti az

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

összefüggést!

6. A Fibonacci-sorozat nem mértani sorozat, viszont két mértani sorozat összege. Melyik ez a két sorozat?

7. Igazoljuk, hogy ha α, β a

$$q^2 - q - 1 = 0$$

egyenlet két gyöke, akkor

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

8. Vizsgáljuk meg, hány százalékos a nyúllállomány növekedése az egyes hónapokban! Körülbelül hány százalékos a nyúllállomány havi növekedése *hosszabb idő eltelte után*?

9. Nagy n-re a Fibonacci-sorozat jól közelíthető egy mértani sorozattal. Melyik ez a sorozat? (Mit jelentsen az: „jól közelíthető egy mértani sorozattal"?)

10. Legyen

$$p_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

a) Igazoljuk, hogy a $\{p_n\}$ sorozatra érvényes a következő összefüggés

$$p_1 = 1; \quad p_{n+1} = 1 + \frac{1}{p_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

b) Figyeljük meg, hogy n növekedtével a $\{p_n\}$ sorozat elemei tetszőlegesen közel kerülhetnek az $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ értékhez!

Tudjuk *bizonyítani is* ezt a megfigyelésünket?

11. Aranymetszésnek nevezzük egy egyenesszakasznak olyan kettéosztását, ahol a nagyobbik rész úgy aránylik a kisebbik részhez, mint az egész egyenesszakasz aránylik a nagyobbik részhez. Ez az arány

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Magyarázzuk meg, hogy miért?

12. Figyeljük meg a szabályt:

$$F_1 + F_2 = 2 = F_4 - 1,$$
$$F_1 + F_2 + F_3 = 4 = F_5 - 1,$$
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7 = F_6 - 1.$$

Írjuk fel a megfigyelt szabályt az első n elem összegére! Érvényes a szabály $n > 4$ esetén is?

13. Figyeljük meg a szabályt:

$$F_1 + F_3 = 3,$$
$$F_1 + F_3 + F_5 = 8,$$
$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 = 21.$$

A megfigyelt szabály alapján töltsük ki a $\boxed{?}$ rovatot:

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = \boxed{?}.$$

Érvényes a szabály $n > 4$ esetén is?

14. Hogyan lehet megadni az

$$L_1 = 1, \qquad L_2 = 3,$$
$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

sorozat képletét a 7. feladatban megadott α és β értékekkel?

15. A következő táblázat alapján adjunk meg egy kapcsolatot F_n, L_n és $F_n L_n$ között! Vizsgáljuk meg, hogy az általunk felírt kapcsolat igaz-e minden n-re!

F_n	1	1	2	3	5	8	13	21
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47
$F_n L_n$	1	3	8	21	55			

16. A fenti táblázatban vizsgáljuk meg az $5 \cdot 5 = 25$ és az ötre szimmetrikus elemek szorzatai: $3 \cdot 8$, $2 \cdot 13$ s. í. t. kapcsolatát! Vizsgáljuk meg, hogy a felírt összefüggés érvényes-e minden n-re!

17. Adjuk meg az a, b, c számhármast úgy, hogy

$$F_{n+1}^2 = aF_n^2 + bF_{n-1}^2 + cF_{n-2}^2, \quad n = 3, 4, \ldots$$

legyen!
Hány ilyen számhármas van?

18. Igazoljuk, hogy nincsen olyan a, b számpár, amelyre

$$F_{n+1}^2 = aF_n^2 + bF_{n-1}^2, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

19. Milyen n-re érvényes

$$nL_{n+1} > (n+1)L_n?$$

20. A **15.** feladathoz csatolt táblázatból látható

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad n = 2, \ldots, 7.$$

Igaz-e ez az összefüggés minden n-re?

21. Hányféle jelsorozatot lehet közvetíteni a

$$\cdot\text{(ti)} \quad \text{és} \quad -\text{(tá)}$$

jelekből n s alatt (n egész szám), ha a *ti* jel átviteli ideje 0,1 s és a *tá* jelé 0,2 s?

A Fibonacci-sorozat általánosítása

Tetszőleges A, B, b_0, b_1 valós számokkal felírt

$$a_1 = A, \; a_2 = B,$$

$$a_{n+1} = b_0 a_n + b_1 a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

sorozat a Fibonacci-sorozat egy-egy általánosítása, hiszen $A=B=b_0=b_1=1$ esetén éppen a Fibonacci-sorozatot kapjuk. Vizsgáljuk meg, hogyan viselkednek ezek a sorozatok és figyeljük meg, hogy a Fibonacci-sorozatnál alkalmazott módszerek menynyiben alkalmazhatók az itt következő feladatok megoldására.

22. Az A, B, b_0, b_1 milyen választása esetén lesz a fenti $\{a_k\}$ sorozat két mértani sorozat összege?

23. A $q^2 - b_0 q - b_1$ polinomnak két különböző valós gyöke legyen α és β. Írjuk fel a $\{p_n\}$ sorozat határértékét! $\left(p_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

24. Írjunk fel a **10.** feladat mintájára egy összefüggést az előző feladatban értelmezett $\{p_n\}$ sorozat két egymás után következő eleme között!

25. Illusztráljuk az előző három feladat eredményeit a következő sorozaton:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2,$$

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

26. Az $x^2 - px - q$ polinom két különböző gyöke legyen r és s,

$$U_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}, \quad V_n = r^n + s^n.$$

a) Írjunk fel egy összefüggést az $\{U_n\}$ sorozat két egymásután következő eleme. U_n és U_{n+1} között!
b) Mi a kapcsolat a $\{V_n\}$ sorozat két egymásután következő eleme, V_n és V_{n+1} között?
c) Igazoljuk a következő összefüggést

$$V_n = U_{n+1} + qU_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

27. Hogyan általánosíthatók az $\{F_n\}$ és $\{L_n\}$ közötti összefüggések az $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ sorozatpárra?

28. Legyen

$$a_1 = 0, a_2 = 1$$

és

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Határozzuk meg az $\{a_n\}$ sorozat határértékét!

A gyökvonás algoritmusa

Kiindulva valamely pozitív a számból, meghatározzuk az a és $1/a$ számtani közepét majd az így nyert pozitív számmal többször megismételjük ezt a műveletet. A következőkben az így nyert $\{c_n\}$ sorozatot fogjuk vizsgálni.

29. Adjuk meg a felvetett problémának egy matematikai megfogalmazását úgy, hogy megadjuk a $c_1 = a$ kezdőértéket és egy (rekurzív) összefüggést adunk meg a $\{c_n\}$ sorozat bármely két egymást követő eleme között!

30. Vizsgáljuk meg, hogy különböző a értékből kiindulva hogyan alakulnak a $\{c_n\}$ sorozat elemei!

Numerikus tapasztalat: Ha $x_1 = 2$ vagy 0,5, akkor (öt tizedesjegy pontossággal)

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 1{,}25,$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(1{,}25 + \frac{1}{1{,}25}\right) = 1{,}025,$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\left(1{,}025 + \frac{1}{1{,}025}\right) = 1{,}000\,30,$$

$$c_5 = \frac{1}{2}\left(1{,}000\,30 + \frac{1}{1{,}000\,30}\right) = 1{,}000\,00,$$

$$c_6 = \frac{1}{2}\left(1{,}000\,00 + \frac{1}{1{,}000\,00}\right) = 1{,}000\,00,$$

és ezután biztosak lehetünk abban, hogy minden ez után következő elem, öt tizedes pontossággal 1. (Miért?)

Ha $c_0 = 10$ vagy 0,1, akkor (ugyancsak öt tizedes pontossággal)

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(10 + \frac{1}{10}\right) = 5{,}05,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(5{,}05 + \frac{1}{5{,}05}\right) = 2{,}624\,01,$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(2{,}624\,01 + \frac{1}{2{,}624\,01}\right) = 1{,}502\,55,$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\left(1{,}502\,55 + \frac{1}{1{,}502\,55}\right) = 1{,}084\,04,$$

$$c_5 = \frac{1}{2}\left(1{,}084\,04 + \frac{1}{1{,}084\,04}\right) = 1{,}003\,25,$$

$$c_6 = \frac{1}{2}\left(1{,}003\,25 + \frac{1}{1{,}003\,25}\right) = 1{,}000\,00,$$

$$c_7 = \frac{1}{2}\left(1{,}000\,00 + \frac{1}{1{,}000\,00}\right) = 1{,}000\,00.$$

Látjuk, hogy $c_n = 1{,}000\,00$ helyettesítésével a rekurzív formula 1,000 00-et ad minden ezután következő elemre.)

31. Módosítsuk egy „kicsit" sorozatunkat a következőképpen:

$$c_1 = A \quad (A > 0),$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right),$$

és vizsgáljuk meg, hogyan alakulnak ekkor a $\{c_n\}$ sorozat elemei!

Numerikus tapasztalat: Ha $A=4$, akkor

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{4}\right) = 2{,}5,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(2{,}5+\frac{4}{2{,}5}\right) = 2{,}05,$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(2{,}05+\frac{4}{2{,}05}\right) = 2{,}000\,61,$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\left(2{,}000\,61+\frac{4}{2{,}000\,61}\right) = 2{,}000\,00,$$

$$c_5 = \frac{1}{2}\left(2{,}000\,00+\frac{4}{2{,}000\,00}\right) = 2{,}000\,00.$$

Ha $A=2$, akkor a számolás így alakul

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2}\right) = 1{,}5,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(1{,}5+\frac{2}{1{,}5}\right) = 1{,}416\,67,$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(1{,}416\,67+\frac{2}{1{,}416\,67}\right) = 1{,}414\,21,$$

$$c_4 = \frac{1}{8}\left(1{,}414\,21+\frac{2}{1{,}414\,21}\right) = 1{,}414\,21.$$

A fentiekből arra következtethetünk, hogy minden ezután következő ele..a $c_n=1{,}414\,21$ $(n>4)$ öt tizedes pontossággal. (Miért?)

32. Mi az összefüggés A és a $\{c_n\}$ sorozat elemei között?

A feladatok megoldásáról:

A feladatok zömét több, egymástól nagyon eltérő módszerrel és különböző mélységben lehet megoldani. Több helyen nem riadtam vissza a nem egyértelmű megfogalmazástól sem, a tanulókra bízva a feladat pontosítását (pl. a **9.** és **32.** feladatokban).

Példaként vázolom a **17.** feladat két különböző megoldását.

I. *Megoldás:* Ha

$$F_4^2 = aF_3^2+bF_2^2+cF_1^2,$$

akkor

$$c+b+4a = 9,$$

ha $n=4$, akkor

$$F_5^2 = aF_4^2+bF_3^2+cF_2^2,$$

amiből $F_2, \ldots, F_5$ értékeit figyelembe véve

$$c+4b+9a = 25,$$

végül $n=5$ esetén a megfelelő egyenlet

$$4c+9b+25a = 64.$$

A kapott lineáris egyenletrendszert megoldva kapjuk: $a=b=2$ és $c=-1$.

Az

$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2+2F_{n-1}^2-F_{n-2}^2$$

formulába az $\{F_n\}$ sorozat megfelelő elemeit behelyettesítve azt tapasztaljuk, hogy a fenti egyenlőség érvényes. Hátra van még annak bizonyítása, hogy a fenti egyenlőség tetszőleges n esetén érvényes. Ez külön ötletet kíván. Igazolni kell még azt is, hogy az a, b, c számhármas meghatározására kapott egyenletrendszernek nincs más megoldása.

II. *Megoldás:* A Fibonacci-sorozat (rekurzív) formulájából következik

$$F_{n+1}^2 = (F_{n-1}+F_n)^2 = F_n^2+F_{n-1}^2+2F_nF_{n-1}.$$

Itt $2F_nF_{n-1}$ „nem megfelelő tag". Ha a fenti egyenlőséget és

$$(F_n-F_{n-1})^2 = F_n^2+F_{n-1}^2-2F_nF_{n-1}$$

egyenlőséget összeadjuk, akkor eltűnik a „nem megfelelő" tag.

$$(F_n+F_{n-1})^2+(F_n-F_{n-1})^2 = 2F_n^2+2F_{n-1}^2.$$

Visszatérve a Fibonacci-sorozat (rekurzív) formulájára

$$F_{n+1}^2+F_{n-2}^2 = 2F_n^2+2F_{n-1}^2,$$

amelyből már minden nyilvánvaló.

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

A versenyfeladatok

1. Mutassuk meg, hogy nincs olyan $R(x)$ racionális törtfüggvény, amelyre $R(x)=\sin x$ teljesül minden valós x-re!

2. Tegyük fel, hogy $c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}+\ldots+c_ke^{t_kx}=0$ minden valós x-re! Mutassuk meg, hogy ha $t_1, t_2, \ldots, t_k$ mind különbözőek, akkor $c_1=c_2=\ldots=c_k=0$.

3. Tegyük fel, hogy f mindenütt értelmezve van és kielégíti az $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ függvényegyenletet! Mutassuk meg, hogy ha $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=c$, akkor $f(x)\equiv cx+a$ alkalmas a-ra!

4. Mutassuk meg, hogy ha f egész függvény, akkor minden korlátos (a, b) intervallum felbontható véges sok olyan részintervallumra, amelyek mindegyikében f vagy monoton növő, vagy monoton fogyó!

5. Mutassuk meg, hogy ha f mindenütt értelmezett, akárhányszor deriválható, és $f^{(n)}(x)\geqq 0$ minden n-re és minden valós x-re, akkor f egész függvény!

6. Ha f mindenütt differenciálható, $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^x f(t)dt=0$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

7. Tegyük fel, hogy f egész függvény, és minden x-re van olyan n természetes egész, hogy $f^{(n)}(x)=0$. Mutassuk meg, hogy f polinom! (A feladat úgy értendő, hogy $n=n(x)$, egyébként a feladat triviális!)

8. Tegyük fel, hogy f mindenütt értelmezve van és kielégíti az alábbi függvényegyenletet:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor vagy $-1 \leqq f(x) \leqq 1$ teljesül minden x-re, vagy $f(x) \geqq 1$ teljesül minden x-re! (f-ről semmilyen folytonossági feltételt nem tettünk fel!)

Megjegyzések. Mint a megelőző cikkekből tudjuk, az olyan függvényeket nevezzük egész függvényeknek, amelyek mindenütt konvergens hatványsorral állíthatók elő. A fenti feladatokban a „mindenütt" azt jelentette, hogy minden valós számra.

Kérjük a versenyzőket, hogy minden feladat megoldását külön lapra írják. Részfeladat megoldását is örömmel látjuk.

Beküldési határidő: 1981. október 15.

Cím: Bolyai János Matematikai Társulat „Tanárok versenye"
Budapest, Anker köz 1-3., I. emelet 111.; 1061

Minden versenyzőnek sok sikert kíván a

Versenybizottság

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10. II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

969. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen olyan számrendszer van, amelyben egy háromjegyű szám kétszer akkora, mint az ugyanezekkel a számjegyekkel (ugyanolyan sorrendben) felírt tízes számrendszerbeli szám!

970. Egy dobókocka minden lapját véletlenszerűen fessük be három szín egyikével. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kocka szemköztes lapjai között vannak egyszínűek?

971. Hogyan kell megválasszuk a

$$13x^3 + 2669x^2 - 45\,373x + c = 0$$

egyenletben a c értékét, hogy az egyenlet legnagyobb gyökének négyzete egyenlő legyen a másik két gyök szorzatával?

Bakos Tibor, Budapest

972. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög akkor és csak akkor egyenlő szárú, ha van két egyenlő hosszú belső szögfelezője!

973. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$kx_1 - x_2^2 = kx_2 - x_3^2 = \ldots = kx_n - x_1^2 = m,$$

ahol k és m adott pozitív valós számok.

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

974. Legyen tetszőleges k természetes számra és n pozitív egészre

$$S_k(n) = \sum_{m=1}^{n} m^k.$$

Bizonyítsuk be, ha a és b relatív prímek, akkor $^{ab}|S_k(ab)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $^{a}|S_k(a)$ és $^{b}|S_k(b)$!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

Feladatmegoldások (945—950.)

945. Egy százas számrendszerben felírt szám egyenlő számjegyeinek négyzetösszegével. Melyik ez a szám?

Bakos Tibor, Budapest

Megoldás: Először azt látjuk be, hogy bármely g alapú számrendszerben a feladatbeli tulajdonságokkal rendelkező szám legfeljebb kétjegyű. A keresett szám legyen N, ekkor

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i g^i = \sum_{i=0}^{n} a_i^2,$$

ahol $0 \leqq a_i \leqq g-1$. Ilyen N szám akkor és csak akkor létezik, ha

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i g^i - a_i^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i (g^i - a_i) = a_0(a_0-1). \tag{1}$$

Mivel egyrészt $g>1$ és $0 \leqq a_i < g \leqq g^i$, ezért

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (g^i - a_i) \geqq a_n(g^n - a_n) \geqq g^n - 1, \tag{2}$$

hiszen $a_i(g^i-a_i) \geqq 0$ és $a_n(g^n-a_n)-(g^n-1)=(a_n-1)(g^n-a_n-1) \geqq 0$. Másrészt viszont

$$a_0(a_0-1) < g^2-1, \tag{3}$$

mert ha $a_0=0$, akkor nyilvánvaló, $1 \leqq a_0$-ra pedig

$$a_0(a_0-1) \leqq (a_0+1)(a_0-1) = a_0^2 - 1 < g^2-1.$$

A (2) és (3)-nak (1)-gyel való összevetéséből

$$g^n - 1 < g^2 - 1$$

kell legyen, azaz $n=0$ vagy $n=1$.
Ezzel állításunkat beláttuk.

Ha most $n=0$, azaz N egyjegyű, akkor

$$N = N^2\text{-ből}$$

$$N = 0 \quad \text{vagy} \quad N = 1 \quad \text{lehet csak.}$$

Ha pedig $n=1$, akkor az

$$a_1(g-a_1) = a_0(a_0-1) \tag{4}$$

egyenletet kell megoldjuk.

A (4) jobb oldala páros, ha tehát $g=100$, akkor a_1 is páros, de így (4) bal oldala osztható 4-gyel, azaz

$$(a_0, a_0-1) = 1 \text{ miatt } 4 | a_0 \text{ vagy } 4 | a_0 - 1.$$

Legyen $a_1=2k$ $(0<k<50)$ és $a_0=4l$ vagy $a_0=4l+1$ $(0<l<25)$. Ezekkel (4) így alakul:

$$k(50-k) = l(4l \pm 1), \quad \text{amiből}$$

$$k = 25 \pm \sqrt{625 - l(4l \pm 1)}. \tag{5}$$

Mivel a $625 - l(4l \pm 1)$ pozitív négyzetszám kell legyen, ezért $1 \leqq l \leqq 12$.

Könnyen látható, hogy az (5) csak $l=8$ esetén ad megfelelő k értéket. Ekkor $k=44$ vagy $k=6$, tehát

$$a_1 = 88 \quad \text{vagy} \quad a_1 = 12,$$

és ezekhez

$$a_0 = 33$$

tartozik, tehát $N=(12)(33)$ vagy $N=(88)(33)$.

Ezek szerint feladatunknak négy megoldása van.

Hornyák Pál, Érsekújvár és Sugár György, Budapest

Megjegyzés: Sugár György megvizsgálta a (4) megoldhatóságának elégséges feltételét. Eszerint a

$$g^2+1=u^2+v^2 \tag{6}$$

diofantikus egyenletet kielégítő páratlan u és azonos paritású g, v pozitív egészekkel az $a_0=\frac{1+u}{2}$ és $a_1=\frac{g+v}{2}$ számpárokból kell kiválogatni a feladat megoldásait.

Legyenek g, u és v egy-egy számtani sorozat ugyanannyiadik elemei.

$$\begin{aligned} g &= d\cdot k+z \quad (0 \leqq z < d),\\ u &= a\cdot k+x \quad (0 \leqq x < a),\\ v &= b\cdot k+y \quad (0 \leqq y < b). \end{aligned} \tag{7}$$

Ezeket (6)-ba írva, majd k hatványai szerint rendezve:

$$k^2(d^2-a^2-b^2)+2k(dz-ax-by)+(z^2+1-x^2-y^2)=0.$$

Ez minden k nem negatív egészre pontosan akkor teljesül, ha

$$d^2=a^2+b^2, \tag{8}$$

$$dz=ax+by, \tag{9}$$

$$z^2+1=x^2+y^2. \tag{10}$$

Mivel változóink nem negatív egészek, ezért (9) ekvivalens a

$$d^2z^2=a^2x^2+2abxy+b^2y^2 \tag{11}$$

egyenlettel.

Vegyük a (10) d^2-szeresét és ebből vonjuk ki (11)-et:

$$d^2=(d^2-a^2)x^2-2abxy+(d^2-b^2)y^2.$$

Ebből (8) miatt

$$d^2=b^2x^2-2abxy+a^2y^2,$$

azaz

$$d=|bx-ay|. \tag{12}$$

Legyen $(a, b)=1$. Ekkor a (12)-ből adódó bármelyik (két) egyenletnek van megoldása.

Így a (8) miatt a, b és d püthagoraszi alaphármasok kell legyenek, s ezek közül bármely hármashoz van a (12)-nek olyan x, y megoldása, melyre $0<x<a$ és $0<y<b$ teljesül, s ezekkel (10)-ből z is meghatározható.

Ezek után (7) szerint g, u és v előállítható, s végül (6) adja a keresett g alapú számok számjegyeit.

Egy számrendszerbeli N számok többféleképpen is előállhatnak. A következő táblázat néhány példát ad:

a	b	d	x	y	z	u	v	g	a_0	a_{11}	a_{12}
3	4	5	1	3	3	$4k+3$	$3k+1$	$5k+3$	$2k+2$	$4k+2$	$k+1$
3	4	5	2	1	2	$4k+1$	$3k+2$	$5k+2$	$2k+1$	$4k+2$	k
5	12	13	1	5	5	$12k+5$	$5k+1$	$13k+5$	$6k+3$	$9k+3$	$4k+2$
5	12	13	4	7	8	$12k+7$	$5k+4$	$13k+8$	$6k+4$	$9k+6$	$4k+2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
48	55	73	17	21	27	$48k+17$	$55k+21$	$73k+27$	$24k+9$	$64k+24$	$9k+3$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Utolsó példánk $k=1$ választásra $g=100$-at adja a már ismert megoldásokkal.

A megoldók száma: 11.

946. Bizonyítsuk be, hogy a

$$4x_{n+1} = \sqrt{6}(x_n + \sqrt{1-x_n^2}) + \sqrt{2}(x_n - \sqrt{1-x_n^2}),$$

$$x_1 = a \quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

feltételekkel definiált (x_n) számsorozat periodikus! Mekkora a periódusa?

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Összefüggésünkkel ekvivalens az

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot x_n + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-x_n^2}.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos\frac{\pi}{12} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin\frac{\pi}{12},$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot \cos\frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x_n^2} \cdot \sin\frac{\pi}{12}.$$

Mivel $0 \leqq a \leqq 1$, ezért létezik oly $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, hogy $a = \sin\varphi$. Vegyük az $i \cdot \frac{\pi}{12} \leqq \varphi \leqq (i+1)\frac{\pi}{12}$ $(i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ eseteket.

1. $$\frac{5\pi}{12} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Ekkor $x_1 = \sin\varphi$, $x_2 = \sin\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{12} + \cos\varphi \cdot \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)$ és $x_3 = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{12} +$ $+ \left|\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)\right| \sin\frac{\pi}{12} = \sin\varphi = x_1$ mert $\frac{\pi}{2} \leqq \varphi + \frac{\pi}{12}$, tehát $\sqrt{1-x_2^2} = -\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)$.

Ennek alapján teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk, hogy $x_{n+2} = x_n$ minden n-re, tehát esetünkben $p=2$ a sorozat periódusa. Ennél kisebb periódusú akkor és csak akkor, ha $\varphi + \frac{\pi}{12} = \pi - \varphi$, azaz ha $\varphi = \frac{11\pi}{24}$, ekkor $p=1$.

2. $$\frac{\pi}{3} \leqq \varphi < \frac{5\pi}{12}.$$

Ez esetben $x_1 = \sin\varphi$, $x_2 = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right)$,

$$x_3 = \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{12}\right) \quad \text{és} \quad x_4 = \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{12}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{12} +$$

$$+ \left|\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{12}\right)\right| \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right) = x_2,$$

mert $\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < \frac{7\pi}{12}$, tehát $\sqrt{1-x_3^2} = -\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{12}\right)$. Ebből teljes indukcióval adódik, hogy a számsorozat periódusa ismét $p=2$, azaz $x_n = x_{n+2}$ $(n>1)$. $p=1$ akkor és csak akkor, ha $\varphi + \frac{\pi}{12} = \pi - \left(\varphi + \frac{2\pi}{12}\right)$, vagyis ha $\varphi = \frac{9\pi}{24}$.

3. $$\frac{\pi}{4} \leqq \varphi < \frac{\pi}{3},$$

Most az előbbiekkel egyező módon: $x_1=\sin\varphi$, $x_2=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{12}\right)$,

$$x_3 = \sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{12}\right), \quad x_4 = \sin\left(\varphi+\frac{3\pi}{12}\right) \quad \text{és} \quad x_5 = \sin\left(\varphi+\frac{3\pi}{12}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{12}+$$

$$+\left|\cos\left(\varphi+\frac{3\pi}{12}\right)\right|\cdot\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{12}\right) = x_3.$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy $x_n=x_{n+2}$ $(n>2)$, azaz $p=2$.

Ha viszont $\varphi+\frac{2\pi}{12}=\pi-\left(\varphi+\frac{3\pi}{12}\right)$, azaz $\varphi=\frac{7\pi}{24}$, akkor $p=1$.

4. $$\frac{\pi}{6} \leqq \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Az előzőekhez hasonlóan: $x_1=\sin\varphi$, $x_2=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{12}\right)$, $x_3=\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{12}\right)$, $x_4=\sin\left(\varphi+\frac{3\pi}{12}\right)$, $x_5=\sin\left(\varphi+\frac{4\pi}{12}\right)$, de $x_6=\sin\left(\varphi+\frac{3\pi}{12}\right)=x_4$, tehát $p=2$, azaz $x_n=x_{n+2}$ $(n>3)$, illetve ha $\varphi+\frac{3\pi}{12}=\pi-\left(\varphi+\frac{4\pi}{12}\right)$, vagyis $\varphi=\frac{5\pi}{24}$, akkor $p=1$.

5. $$\frac{\pi}{12} \leqq \varphi < \frac{\pi}{6}.$$

Most a sorozat első öt tagja ez előbbi esetbeliekkel egyező.

$$x_6 = \sin\left(\varphi+\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{és így} \quad x_7 = \sin\left(\varphi+\frac{5\pi}{12}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\left|\cos\left(\varphi+\frac{5\pi}{12}\right)\right|\cdot\sin\frac{\pi}{12} =$$

$$= \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right) = x_5.$$

Ekkor tehát $x_n=x_{n+2}$ $(n>4)$ és $p=2$, kivéve ha $\varphi+\frac{4\pi}{12}=\pi-\left(\varphi+\frac{5\pi}{12}\right)$. Így $\varphi=\frac{3\pi}{24}$ esetén $p=1$.

6. $$0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{12}.$$

Sorozatunk első hat tagja az előbbi. $x_7=\sin\left(\varphi+\frac{6\pi}{12}\right)$ és $x_8=\sin\left(\varphi+\frac{5\pi}{12}\right)=x_6$, tehát $n>5$ esetén $x_n=x_{n+2}$, azaz $p=2$, hacsak $\varphi\neq\frac{\pi}{24}$. A $\varphi=\frac{\pi}{24}$-re $p=1$.

Ezzel beláttuk, hogy az (x_n) számsorozat periodikus és periódusa legfeljebb 2 abban az értelemben, hogy legfeljebb az x_6-tól kezdve $x_n=x_{n+2}$, ha $\varphi\neq\frac{\pi}{24}(2k+1)$ $(0\leqq k\leqq 5)$, különben a sorozat állandó, azaz periódusa 1.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely és Sugár György, Budapest

A megoldók száma: 9.

947. Adott két számegyenes, egyenlő hosszúságú egységekkel. Bizonyítsuk be, hogy az azonos valós számoknak megfelelő pontokat összekötő szakaszok felezőmerőleges síkjai egyállásúak vagy egy egyenesre illeszkednek!

Németh László, Vasvár

Megoldás: Legyen e és f a két számegyenes. Jelölje a 0 pontjukból az 1 pontjukba vezető vektorokat rendre $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$. Válasszuk meg a számegyenesek pontjaihoz vezető helyvektorok közös kezdőpontjául a két számegyenes origójait összekötő szakasz F felezőpontját. Ekkor, ha $\mathbf{a}$ jelöli F-ből az e kezdőpontjába vezető helyvektort, akkor $-\mathbf{a}$ az F-ből a másik egyenes kezdőpontjába visz. E választásokra a két számegyenes azonos α számozású pontjaihoz vezető helyvektorok:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{a}+\alpha\mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_f = -\mathbf{a}+\alpha\mathbf{f}.$$

Ezeket a pontokat összekötő szakasz felezőpontjának $\mathbf{r}_\alpha$ helyvektorára

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\alpha}{2}(\mathbf{e}+\mathbf{f}),$$

a két pontra illeszkedő szakasszal párhuzamos vektor pedig

$$\mathbf{n}_\alpha = 2\mathbf{a}+\alpha(\mathbf{e}-\mathbf{f}).$$

Így a szakaszfelező-merőleges $\mathbf{S}_\alpha$ síkok vektoregyenlete

$$\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha) = 0,$$

azaz

$$[2\mathbf{a}+\alpha(\mathbf{e}-\mathbf{f})]\left[\mathbf{r}-\frac{\alpha}{2}(\mathbf{e}+\mathbf{f})\right] = 0,$$

amiből

$$(\mathbf{e}-\mathbf{f})(\mathbf{e}+\mathbf{f}) = \mathbf{e}^2-\mathbf{f}^2 = 1-1 = 0$$

miatt,

$$[2\mathbf{a}+\alpha(\mathbf{e}-\mathbf{f})]\,\mathbf{r}-\alpha\mathbf{a}(\mathbf{e}+\mathbf{f}) = 0. \tag{1}$$

Jelölje előbbi vektoregyenletünk bal oldalát is az $\mathbf{S}_\alpha$, akkor bármely t valósra

$$0 = \mathbf{S}_0+t\mathbf{S}_1 = 2\mathbf{ar}+t(2\mathbf{a}+\mathbf{e}-\mathbf{f})\mathbf{r}-t\mathbf{a}(\mathbf{e}+\mathbf{f}) = [2(1+t)\mathbf{a}+t(\mathbf{e}-\mathbf{f})]\mathbf{r}-t\mathbf{a}(\mathbf{e}+\mathbf{f}). \tag{2}$$

Ha $\mathbf{S}_0$ és $\mathbf{S}_1$ egyállású síkok, akkor az $\mathbf{S}_0+t\mathbf{S}_1=0$ egyenletű sík is egyállású ezekkel, hiszen normálvektora a párhuzamos $\mathbf{a}$ és $\mathbf{e}-\mathbf{f}$ vektorok lineáris kombinációja.

Ha viszont $\mathbf{S}_0$ és $\mathbf{S}_1$ metsző síkok, akkor metszésvonaluk bármely pontjának $\mathbf{r}^*$ helyvektorára $\mathbf{S}_0(\mathbf{r}^*)=0$ és $\mathbf{S}_1(\mathbf{r}^*)=0$, tehát $\mathbf{r}^*$ kielégíti az $\mathbf{S}_0+t\mathbf{S}_1=0$ egyenletű síkot is, azaz e sík illeszkedik az $\mathbf{S}_0$ és $\mathbf{S}_1$ közös egyenesére.

Már csak azt kell igazoljuk, hogy bármely $\alpha\neq 1$ valós számhoz található olyan t valós szám, hogy az $\mathbf{S}_0+t\mathbf{S}_1=0$ síkegyenlet csak egy nem zérus tényezőben különbözik (1)-től.

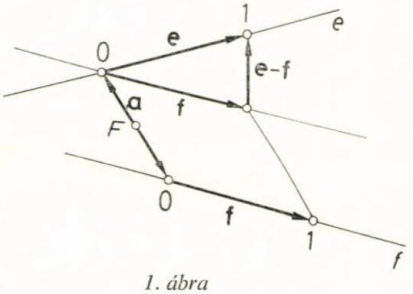
Ha a $t=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ választással élünk, akkor (2)-ből

$$0 = \mathbf{S}_0+t\mathbf{S}_1 = \left[\frac{2}{1-\alpha}\mathbf{a}+\frac{\alpha}{1-\alpha}(\mathbf{e}-\mathbf{f})\right]\mathbf{r}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathbf{a}(\mathbf{e}+\mathbf{f}) = \frac{\mathbf{S}_\alpha}{1-\alpha},$$

és ezt kellett bizonyítsuk.

Megjegyzés: $\mathbf{S}_0$ és $\mathbf{S}_1$ síkok akkor és csak akkor egyállásúak, ha $2\mathbf{a}\|2\mathbf{a}+\mathbf{e}-\mathbf{f}$, azaz ha $\mathbf{a}\|\mathbf{e}-\mathbf{f}$. Feladatunk felezőmerőleges síkjai tehát akkor és csak akkor egyállásúak, ha az FO egyenes (1. ábra) merőleges az egysíkú e és f egyenesek egyik szimmetriatengelyére (ha $F=O$, akkor FO legyen szögfelező).

Matolcsy Kálmán, Debrecen



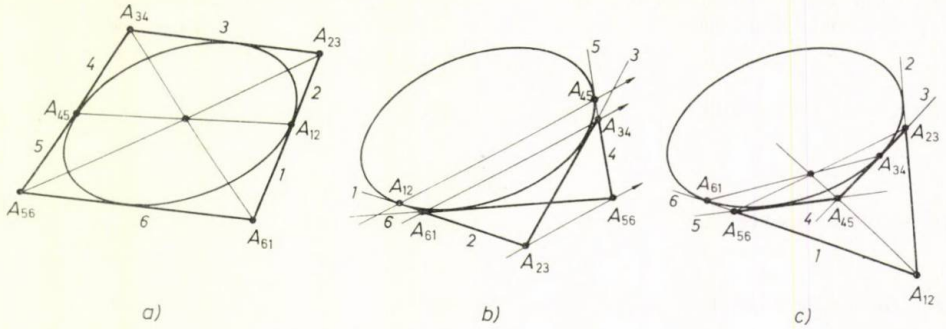
1. ábra

A megoldók száma: 6.

948. Adott egy k kör és négy érintője. Bizonyítsuk be, hogy a nem szomszédos érintők érintési pontjai és a négy érintő adta négyszög két átlójának metszéspontja egy-egy egyenesen van!

Vigassy Lajos, Budapest

I. megoldás: Állításunk Brianchon tételének (lásd pl.: Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, 48.3, 501. oldal) speciális esete. Legyen ugyanis a közönséges kúpszelet köré írt hatszög két-két szomszédos oldala azonos. Ekkor metszéspontjuknak a közös érintési pontot tekintjük.

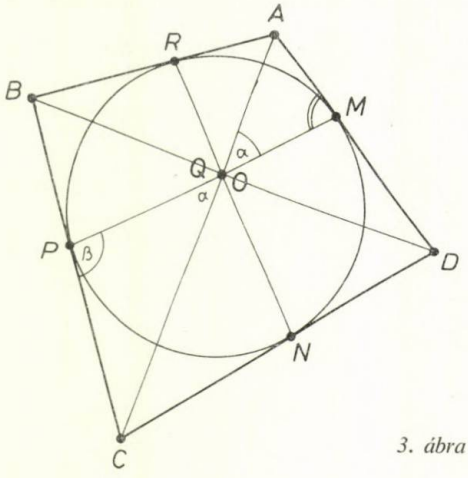


2. ábra

A 2. ábra jelöléseivel: az A_{12}, A_{45}; A_{23}, A_{56} és az A_{34}, A_{61} átellenes szögpontpárokra illeszkedő egyenesek a *Brianchon-tétel* miatt egy ponton mennek át és ez a három egyenes a feladatunkbeli két átló és két nem szomszédos érintő érintési pontjaira illeszkedő egyenes. A feladat állítása tehát bármely közönséges kúpszelet köré írt négy érintőre is igaz. A feladat állítása akkor is igaz, ha a négyszög oldalai, ezek érintési pontjai, továbbá a négyszög szögpontjai között ideális elemek is szerepelnek.

Matolcsy Kálmán, Debrecen és
Nyírő László, Mezőkövesd

II. megoldás: Tegyük fel először, hogy az érintési pontok nincsenek egy félkörön. Ekkor az érintők konvex négyszöget határoznak meg (3. ábra). Jelölje O az AC és a PM szakaszok közös pontját. Az OMA és az OPC háromszögekben az O csúcsnál levő szögek egyenlők, mert csúcsszögek, a $\beta = OPC\sphericalangle = \pi - OMA\sphericalangle$, mert teljes kört adó ívekhez tartozó, érintőszárú kerületi szögek. Előbbi háromszögeinkre alkalmazva a sinustételt



3. ábra

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{OA}{\sin\beta}, \quad \text{illetve} \quad \frac{CP}{\sin\alpha} = \frac{OC}{\sin(\pi-\beta)},$$

azaz

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CP}. \tag{1}$$

Legyen Q az AC és az NP szakaszok közös pontja. A fentiekhez hasonlóan, a QRA és a QNC háromszögekből:

$$\frac{QA}{QC} = \frac{AR}{CN}. \tag{2}$$

Mivel $AM = AR$ és $CP = CN$, hiszen érintőszakaszok, az (1) és (2) egybevetéséből

$$\frac{OA}{OC} = \frac{QA}{QC}.$$

Ez azonban csak úgy lehet, ha O és Q pontok azonosak, mert az AC szakasznak egyetlen olyan pontja van, melynek a két végponttól való távolságaránya adott állandó. Ezzel a feladat állítását igazoltuk, hiszen az AC és BD átlóknak nincs kitüntetett szerepe, s így beláttuk, hogy az átlók közös pontja azonos az NR és az MP szakaszoknak közös pontjával.

Ha az érintési pontok egy félkör pontjai, akkor az érintők konkáv négyszöget szolgáltatnak (feltéve, hogy az érintési pontok között nincs két átellenes). Eljárásunk ebben az esetben is, az előbbiekhez hasonló.

A megoldók száma: 13. *Kacsó Ferenc, Marosvásárhely*

949. Jelölje α_n az

$$f_n: x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{2n} x^k \quad (n \text{ pozitív egész})$$

polinomfüggvény valós zérushelyei szorzatának abszolút értékét. Bizonyítsuk be, hogy a $\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_n)$ létezik, és határozzuk is meg!

Bartha Gábor, Szentendre

Megoldás: Tekintsük a

$$g_n(x) = (x-1) f_n(x) = x^{2n+1} - 2x + 1$$

polinomfüggvényt. Ennek valamennyi zérushelye, az $x=1$ kivételével, zérushelye az $f_n(x)$-nek és viszont.

A $g_n'(x) = (2n+1)x^{2n} - 2 = 0$-ból adódóan a $g_n(x)$ függvénynek a $-\sqrt[2n]{\frac{2}{2n+1}}$ helyen maximuma, a $\sqrt[2n]{\frac{2}{2n+1}}$ helyen minimuma van. E szélsőértékhelyek a számegyenest három intervallumra osztják, melyek mindegyikén $g_n(x)$ szigorúan monoton, így $x=1$-en kívül két zérushelye van. Jelölje ezeket x_{1n} és x_{2n}, továbbá legyen $x_{1n} < x_{2n}$.

$$x_{1n} < 0, \quad \text{hiszen} \quad g_n(-1) = 2 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} g_n(x) = -\infty.$$

Hasonlóan

$$\frac{1}{2} < x_{2n} < \frac{3}{4}, \quad \text{mert} \quad g_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} > 0 \quad \text{és} \quad g_n\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1} - \frac{1}{2} < 0.$$

A *Lagrange*-tételt alkalmazva g_n-re az $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ intervallumban: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = g_n\left(\frac{1}{2}\right) - g_n(x_{2n}) = \left(\frac{1}{2} - x_{2n}\right) g'(\xi)$, amiből $0 \neq g_n'(\xi)$ korlátossága miatt,

$$\left|\frac{1}{2} - x_{2n}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \cdot \left|\frac{1}{g_n'(\xi)}\right| \text{-ből}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \frac{1}{2}.$$

Az $x_{1n} < -1$ miatt legyen $x_{1n} = -1 - \varepsilon_n$, ahol $\varepsilon_n > 0$. Ha $n \geq 2$, akkor

$$g_n\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2n+1} - 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 < 0,$$

és ezért $g_n(x)\, x_{1n}$ gyöke a $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ intervallumban van. Így $\varepsilon_n < \frac{1}{2}$, s ezért

$$0 = g_n(x_{1n}) = g_n(-1-\varepsilon_n) = (-1-\varepsilon_n)^{2n+1} - 2(-1-\varepsilon_n) + 1,$$

azaz

$$(1+\varepsilon_n)^{2n+1} = 3 + 2\varepsilon_n < 4.$$

A *Bernoulli* egyenlőtlenség miatt

$$(1+\varepsilon_n)^{2n+1} > 1 + (2n+1)\varepsilon_n,$$

tehát előbbi egyenlőtlenségünk miatt

$$1 + (2n+1)\varepsilon_n < 4,$$

amiből

$$\varepsilon_n < \frac{3}{2n+1},$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \text{s így} \quad \lim_{n\to\infty} x_{1n} = -1.$$

Ezek alapján

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} |x_{1n} \cdot x_{2n}| = \frac{1}{2},$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \left(-2 + \frac{1-\alpha_n^{2n+1}}{1-\alpha_n} \right) = -2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 0.$$

A megoldók száma: 5.

Bogdán Zoltán, Cegléd

950. Adott egy K kerületű, T területű egyenlő szárú háromszög. Bármely $t < T$ pozitív valós számra hány (nem egybevágó) t területű, K kerületű egyenlő szárú háromszög van?

Megoldás: Legyen a háromszög alapja x, szárai y hosszúak. Ekkor $K = x + 2y$. A K kerületű háromszög $t(x)$ területére

$$t^2(x) = \frac{1}{4} x^2 \left(y^2 - \frac{x^2}{4} \right) = \frac{1}{4} x^2 \left(y + \frac{x}{2} \right) \left(y - \frac{x}{2} \right).$$

Mivel $y = \frac{K}{2} - \frac{x}{2}$, ezért

$$t^2(x) = \frac{x^2}{4} \left(\frac{K}{2} - x \right) \frac{K}{2} = \frac{K}{16} (Kx^2 - 2x^3).$$

Tekintsük az egyváltozós

$$f(x) = \frac{16t^2(x)}{K} = Kx^2 - 2x^3, \quad 0 \leqq x \leqq \frac{K}{2}$$

függvényt!

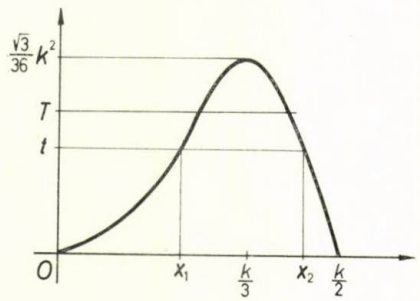
Az $f(x)$ és a $t(x)$ függvényeknek az adott intervallumon azonosak a zérushelyeik és a szélsőértékhelyeik, továbbá $f(x)$ és $t(x)$ ugyanazokon a részintervallumokon növekvőek, illetve fogyóak. Mivel

$$f'(x) = 2Kx - 6x^2, \quad \text{ezért}$$

$$f'(x) = 0, \quad \text{ha} \quad x = 0 \quad \text{vagy} \quad x = \frac{K}{3}.$$

Az $f(x)$ menete tehát

	$x = 0$	$0 < x < \frac{K}{3}$	$x = \frac{K}{3}$	$\frac{K}{3} < x < \frac{K}{2}$	$x = \frac{K}{2}$
$f'(x)$	0	+	0	—	—
$f(x)$	0	↗	max. $t\left(\frac{K}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{36} K^2$	↘	0



4. ábra

A $f(x)$ és $t(x)$ menetének hasonló jellegéből adódóan, $t(x)$ grafikonja

A 4. ábráról is leolvasható, hogy $T \leqq \frac{\sqrt{3}}{36} K^2$, valamint az, hogy bármely $0 < t < T$ érték esetén pontosan két x érték tartozik t-hez, azaz adott t érték esetén két nem egybevágó egyenlő szárú háromszög van.

Bartha Gábor, Szentendre és Németh László, Vasvár

A megoldók száma: 12.

A megoldók névsora (945—950.)

Bagi Gábor, Barcs (945.); Bartha Gábor, Szentendre (945—950.); Bogdán Zoltán, Cegléd (948—950); Hárspatakiné Dékány Veronika (945.); Hornyák Pál, Érsekújvár (945., 946., 948.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (946., 950.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (945—947., 948. két mód, 949—950.); Kun Péter, Szentendre (947—948.); dr. Major Pál (945.); Matolcsy Kálmán, Debrecen (946—950); Németh László, Vasvár (945., 947—948., 950.); Nyirő László, Mezőkövesd (945., 947—948., 950.); Schutzbach Mártonné, Siófok (945.); Sugár György, Budapest (945. két mód, 946., 950.); Szánthó Gyula, Gyula (947—948., 950.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (945—946., 948. két mód); Vermes Miklós (948., 950.); Zalán Péterné, Budapest (946., 948., 950.); Zsidó György Kolozsvár (950.).

TÁJÉKOZTATÁS
az első nemzetközi statisztikatanítási konferenciáról

A Nemzetközi Statisztikai Intézet (ISI) 1982. augusztus 8-tól 13-ig Sheffieldben rendezi meg az első nemzetközi statisztikatanítási konferenciát. A konferencia fő célja, hogy fórumot biztosítson a statisztika tanításával kapcsolatos kérdések (tananyag, oktatási módszerek stb.) megvitatására és elősegítse a nemzetközi együttműködés kialakítását, elsősorban a következő négy területen:

a) az alsó fokú és a középfokú oktatásban;
b) felsőfokon, de nem a leendő statisztikusok képzésében;
c) államigazgatási és ipari szakemberek képzésében, illetve továbbképzésében;
d) a tanító- és tanárképzésben.

További tájékoztatást *dr. Nemetz Tibor*, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének (Budapest, Reáltanoda u. 13–15.; 1053) tudományos főmunkatársa tud adni.

Részletes információ a konferencia szervező bizottságától nyerhető:
The Conference Secretary
International Conference on the Teaching of Statistics
Department of Probability and Statistics
The University
Sheffield S3 7RH
England

Helyreigazítás

Lapunk ez évi **3.** számában a 68. oldalon az **5.** feladat megoldása sajnálatos módon hibásan jelent meg. A helyes megoldás a következő:

Ha a kocka éle a, akkor egy gúla térfogata $\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}:6=\frac{a^3}{48}$. A nyolc gúla térfogata $\frac{a^3}{48}\cdot 8=\frac{a^3}{6}$. Ez az a élű kocka térfogatának 16,67 %-a. A maradék test térfogata tehát 83,33 %.

A versenyzők teljesítményének elbírálása természetesen a fenti helyes megoldás alapján történt.

Az elkövetett hibáért Kedves Olvasóink szíves elnézését kérjük.

Végül talán nem lesz érdektelen, ha megírjuk, hogy a hibára elsőként *Földváry Beáta* általános iskolai tanuló (Papos, Petőfi u. 46.; 4338) hívta fel figyelmünket. Figyelmességéért ez úton mondunk köszönetet.

A Szerkesztőség

5,50 Ft

Javasolt szakirodalom a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 5.* (83 001) 27,50
Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv, általános iskola. Matematika 6.* (83 020) ..... 39,—
Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681) ..... 16,—
Munkaközösség: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (8178) 29,50
M. Bartal—Pálfalviné: *Tankönyvi útmutató a gimnáziumi II. osztályos matematika munkatankönyvhöz* (84 070) ..... 7,—
Bartal—Jakab—Kántorné: *Ismerkedés a kísérleteinkkel.* Új utak a matematika tanításában (52 522/4) 29,50
Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991) ..... 9,—
Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—
Máté László: *Sorozatok, sorok* (29 243) ..... 12,—
Vigassy Lajos: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben* (29 247) 9,50
Bognárné—Nemetz—Tusnády: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253) ..... 17,—
Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50
Hámori Miklós: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) ..... 10,—
Kovács Győző: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika II. (29 217) 12,50
Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC* (52 659) ..... 35,—
Péter Rózsa: *Játék a végtelennel.* Matematika kívülállóknak (52 489) ..... 31,—
Élő matematika 1. *Tanulmányok.* Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) ..... 18,—
Élő matematika 2. Jánossy—Tasnádi: *Valószínűségszámítás* (92 347/2) ..... 6,—
Élő matematika 3. Gergely—Hódi és mások: *A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) ..... 13,—
Élő matematika 4. Korányi Erzsébet: *Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) . 18,50
Felvételi feladatok: matematika, fizika, szabadkézi rajz. Szerkesztette: Pálfai Pál (81 159/1) ..... 108,—
Dr. Scharnitzky Viktor: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából, 1974—1976.* IV. kötet (8158/IV.) 18,50
Magyar Felsőoktatási Intézmények Tájékoztatója (93 141) ..... 55,—

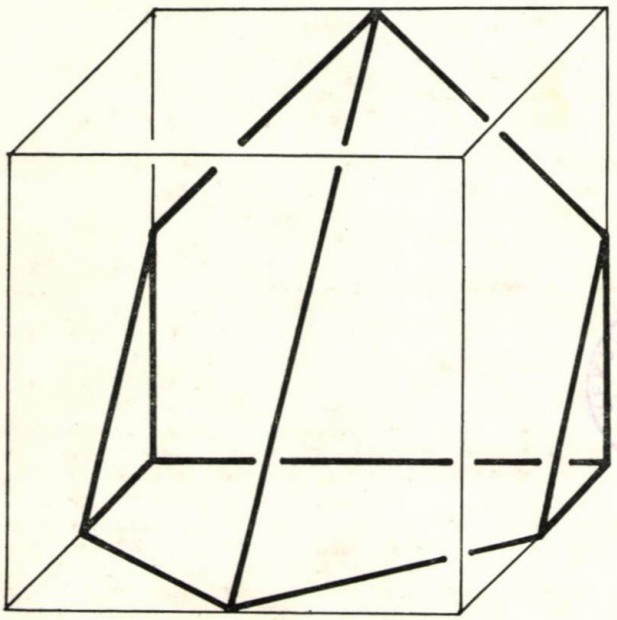
Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 4. Könyvesboltban (1051 Bp., Október 6. u. 8.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1981. október * XXVIII. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200
81-3726 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Fonódi Gyula: Felmérő feladatsorok matematikából Hajdú-Bihar megyében 129
Dr. Kántor Sándorné: Megjegyzések és szintezési útmutató a középiskolai új tankönyveknek a Geometriai feladatok gyűjteményéből választott feladataihoz .. 132
Dr. Urbán János: Javaslat a gimnáziumi „A" változatú fakultatív matematikatanterv III. osztályos Analízis I. témakörének tanításához 137
Dr. Szepessy Bálint: Jelentés a Tanárképző Főiskolák 1981. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről 138
Garádi János: Beszámoló a Középiskolások Számítástechnikai Versenyeiről 144
Lasztóczi Gyula: Rajzoljunk a térbe! 149
FELADATOK 152
KÖNYVISMERTETÉS IV

СОДЕРЖАНИЕ

Фонодь Дьюла: Листки обмерения по математике в комитате Хайду-Бихар 129
Д-р Кантор Шандорне: Замечания и указания к определению уровни к задачам новых учебников выбранные от собрании геометрических задач 132
Д-р Урбан Янош: Предложение к обучении темы Математический Анализ I в факультативном программе математики третьего класса гимназий (высших средних школ), вариант „А" 137
Д-р Сепеши Балинт: Отчёт об Общегосударственном Соревновании Педагогических Институтов по математике в году 1981 138
Гарадь Янош: Отчёт о соревновании учеников средних школ по вычислительной технике 144
Ластоци Дьюла: Давайте рисовать в пространстве! 149
ЗАДАЧИ 152
РЕЦЕНЗИЯ IV

INHALT

Fonódi, Gyula: Aufgabenreihen zur Abmessung der Schülerleistungen in der Mathematik in Komitat Hajdú-Bihar 129
Frau Tünde Kántor (geb.: *Varga*): Bemerkungen und Nivellierungsanweiser zu den Aufgaben der neuen Lehrbücher in den Mittelschulen, die aus der Sammlung der geometrischen Aufgaben ausgewählt worden sind 132
Dr. Urbán János: Ein Vorschlag zum Unterricht des Themenkreises Analysis I. des fakultativen Mathematik-Lehrplans Variante „A" des Gymnasiums in der III. Klasse 137
Dr. Szepessy, Bálint: Bericht über den Mathematik-Wettbewerb der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1981 138
Garádi, János: Bericht über die Wettbewerbe der Schüler der Mittelschulen in der Rechentechnik 144
Lasztóczi, Gyula: Zeichne man in den Raum! 149
AUFGABEN 152
BUCHBESPRECHUNG IV

FONÓDI GYULA
vezető szakfelügyelő, Debrecen

Felmérő feladatsorok matematikából Hajdú-Bihar megyében (Általános iskola 5. osztály)

Sok pedagógusban vetődött fel a kérdés, hogy kellenek-e egységes feladatok, feladatsorok matematikából (például országosan) az eredményes matematikatanítás *mérésére?* Egyáltalán lehet-e mérni, sztenderdizálni a matematikai tudást? Tudott dolog, hogy a fizikatantárgyhoz vannak ilyen országosan elterjedt és a tankönyv mellékleteként megvásárolható feladatok, feladatsorok, amelyek *mérik* a tanulók tudásszintjét.

Lehet-e matematikából hasonló, tudásszintet mérő feladatokat összeállítani? Állásfoglalásunk, hogy lehet és szükséges is, ugyanakkor nem állítjuk azt, hogy valamiféle „abszolút tudást" mérhetünk fel egy-egy ilyen feladatsorral. Az új és az ideiglenes matematika-tanterv bevezetésének eredményességét a tanításban azonban jól tükrözhetik, követhetik a jól, tudatosan szerkesztett feladatok. Több év óta végzünk ilyen irányú felméréseket megyénkben, tapasztalataink szerint ezeket a nevelők, tanulók egyaránt igénylik.

Tudomásom szerint a tantervi követelmények taníthatóságát, oktathatóságát, a tankönyvek taníthatóságát például az NDK-ban folyamatosan mérik. A mérések eredményeiből következtetéseket vonnak le, és akár a dokumentumokon is változtatnak szükséges mértékben.

Miért félünk mi ennyire az eredményesség mérésétől a matematikával kapcsolatban? Miért félünk a tantervi követelmények pontosításától a matematika vonatkozásában? Szerintünk nagyon szükséges a tantervi követelmények teljesítésének mérése, s a mérési eredmények alapján a követelmények pontosabbá tétele, annál is inkább, mivel már hetedik éve tart a matematika új tantervének a bevezetése. Ebben a stádiumban már kellene, hogy kialakuljon országosan is egy egységes kép a matematika új koncepciójának az eredményességéről, taníthatóságáról.

Ezt próbáltuk Hajdú-Bihar megyében megvalósítani a felmérések széles körű elterjesztésével, egységes felmérési anyaggal. A felmérő feladatokat kiváló tanárokból és szakfelügyelőkből álló munkaközösség állította össze, Fehér Károly megyei szakfelügyelő vezetésével. A munkaközösség minden tagja az első évtől kezdve tanítja az új matematikát.

Egy pillanatig sem állítjuk azt, hogy ezen felméréseinkkel az új dokumentumrendszert, a nevelésközpontú, tanulásközpontú korszerű elképzeléseket, az új matematikaanyag taníthatóságát kívántuk megkérdőjelezni. Ezeknek a bevezetése szükséges volt az általános iskoláinkban, mivel társadalmi igényeket testesítenek meg. Ezekkel a felmérésekkel éppen azt bizonyítottuk, hogy lehet eredményesen tanítani az új matematika anyagát is, függetlenül attól, hogy tagadhatatlanul vannak nehézségek a tanítása során, például egyes fejezetei nehezen taníthatók, hogy kevés a műveleti készségek begyakorlásához az idő stb.

Megmutattuk a matematikát tanító nevelőknek azt, milyen mélységben kérhetik számon a tanulóktól az anyag teljesítését. Ezzel igényesebb munkára szoktattuk tanárainkat, mivel igen széles

skálán értelmezték a követelményeket. A tanulók elé mércét kívántunk állítani, amely támpontot ad értékelésükhöz, osztályozásukhoz. Az eredmények megyei összegyűjtése pedig számunkra adott hasznos információkat a tantervi anyag teljesíthetőségének vonatkozásában. Kiugrottak a hibák, de jelentkeztek az eredmények is.

Nem szabad az itt közölt feladatokat abszolút mérceként kezelni, ezt jól tudják a megye matematikát tanító nevelői. A tanulók értékelése és osztályozása azonban mégis magasabb színvonalúvá lett a megyében, az osztályzat jobban közelít a valóságos tudáshoz.

A felmérő feladatok A és B sorokra készültek évfolyamonként. Minden feladathoz pontszámokat is javasolunk, ami az eredmények konkrét elemzését teszi lehetővé.

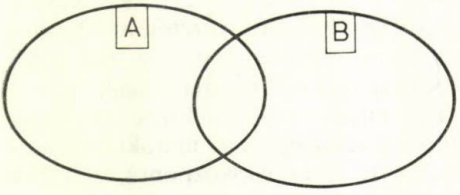
Az 1980/81. tanévben 39 iskolában tanították az új 5. osztályos matematikát megyénkben. Az elért eredmények feladatonként a következőek. (Évi 6 felmérés van!)

1. felmérés:

1. feladat: Követelmények:

a) „Ismerjék és használják a tört számok különféle írásmódjait. "(Min.)
„Tudják megállapítani, hogy két szám közül melyik a nagyobb..." (Min.)
„Ismerjék a ... nem nagyobb, ... nem kisebb ... fogalmakat..."
— Írd be a számokat az ábra megfelelő részébe:

$$-8;\ \frac{3}{4};\ \frac{+12}{3};\ -1;\ \frac{-15}{2};\ \frac{-2}{3};\ 0;\ \frac{-5}{5}.$$



1. ábra

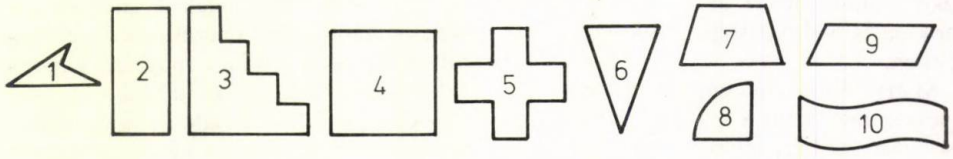
A:= ($^-1$-nél nem nagyobb),
B:= ($^-1$-nél nem kisebb). (4 pont)

Megyei teljesítményátlag: 58,8%.

b) Követelmény:
„Tudják helyesen alkalmazni a *minden* és *van olyan* kifejezéseket és tagadásukat konkrét esetben." (Min.)

— Az alábbi állítások után írd annak az alakzatnak a számát, amelyikre igaz:
— Vannak párhuzamos oldalai:.....
— Minden oldala egyenlő:.....
— Van derékszöge:.....
— Van párhuzamos oldalpárja és minden szöge derékszög:.....

(4 pont)



2. ábra

Megyei teljesítményátlag: 57,8%.

2. feladat: Követelmény:
„Tudjanak negatív számot összeadni, kivonni."
a) — Folytasd a sorozatot mindkét irányban 2—2 taggal és add össze a sorozat minden tagját: (4 pont)

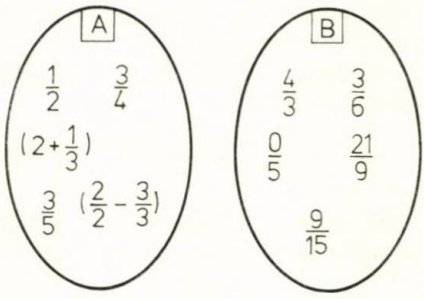
$$\ldots;\ \ldots;\ {}^{-}4;\ {}^{-}1;\ {}^{+}2;\ {}^{+}5;\ \ldots;\ \ldots$$

b) — Oldd meg a nyitott mondatokat: (6 pont)

$$\triangle + {}^{-}33 = {}^{+}50;\quad {}^{+}42 - \square = {}^{-}53;\quad \bigcirc - {}^{-}5 = {}^{-}2.$$

Megyei teljesítményátlag: a) 61,5%,
b) 46,4%.

3. feladat: Követelmény:
„Ismerjék és használják a tört számok különféle írásmódjait..."
— Kösd össze az egyenlőket! (4 pont)
Megyei teljesítményátlag: 55,8%.



3. ábra

4. feladat: Követelmény:
„Ismerjék és használják a tört számok különféle írásmódjait, és tudják helyüket megkeresni a számegyenesen."
— Ábrázold számegyenesen a következő tört számokat: (6 pont)

$$\frac{{}^{-}1}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{12};\ \frac{2}{3};\ \frac{7}{6};\ \frac{4}{6}.$$

Megyei teljesítményátlag: 53,8%.

Az első felmérés összteljesítménye a megyében az *1980/81. tanévben* 56,6%.
Az 1979/80. tanévben a megyei átlag: 63,9% volt. Ez a „romlás" egyben arra is bizonyíték, hogy bár a két évben egymás után ugyanazok a feladatok szerepeltek a felmérésekben, nem törekedtek arra a nevelők, hogy ezeket megtanítsák a tanulókkal! Bízni kell tehát a nevelőkben ezen a téren is!

Célom az volt, hogy bemutassam az első felmérő feladatsort. A feladatsorok összeállítói — mint az kitűnik — a komplexitásra törekedtek. Nem szokványosak a feladatok, problémamegoldó gondolkodást a „legegyszerűbbek" is igényelnek a tanulóktól, igénylik a matematikus gondolkodásmódot.

Milyen tapasztalatokat szűrtünk le az első felmérés eredményeit elemezve?

1. Negatív számok nagysági viszonyait 5. osztályban nem kellően értik tanulóink, különösen a negatív törteknél. Célszerű ezen a szinten még megmaradni a konkrét fokon, pl. számegyenesen ábrázolásnál.

2. Tanulóink a *minden* és a *van olyan...* kifejezéseket elég jól meg tudják különböztetni. Ha *van olyan,* akkor még nem biztos, hogy *mindenre* igaz egy ítélet. Az összetett következtetések mennek nehezebben, például a konjunkciós kapcsolatokkal.

3. Az egész számokkal végzett műveletek közül a negatív szám kivonását bizony nehezen értik 5. osztályban a ta-

nulók. Nyitott mondatok megoldásakor jelentkező problémák megoldására nehezen tudják ezt a műveletet használni. Nem értik azt, hogy $^{-}(a)$ értéke attól függ a műveletben, hogy *a* változó helyébe pozitív vagy negatív számot helyettesítünk, s az egyik esetben csökkenés, másik esetben növekedés következik be.

4. A műveletek közötti összefüggést az újabb számkörökben ismét és állandóan értelmezni kell! Nem kellően él a tanulókban az, hogy az összeadás és kivonás egymásnak inverze. Alsó tagozatban kellene már ezt az *összefüggést* jobban hangoztatni, nem pedig azt, hogy „az összeadás próbája a kivonás"!

5. Nem tudják kellő biztonsággal tanulóink, hogy:

pl. $2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$, ami a bővítéskor derült ki.

6. A számegyenes önálló elkészítése, a beosztás megválasztása tanulóink jelentős részének gondot okoz. Az alsó tagozat előkészítő szerepe igen fontos ebben a témakörben! Nem a negatív tört szám ábrázolásában volt a hiba, hanem magának a számegyenesnek az elkészítésében.

A többi 5 felmérést hasonlóan kiértékeltük, de ezt ebben a cikkben terjedelme miatt nem tudom részletezni. A felmérések anyagát a megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet technikai csoportja sokszorosította (Molnár Géza csoportvezetőnek ez úton is köszönetet mondok). Ezek a felmérések eljutottak a megyék Továbbképzési Kabinetjeihez, Intézeteihez és minden megye vezető szakfelügyelője megkapta.

A megyei felmérések tették lehetővé azt, hogy elemzésükkel a Tanterv követelményrendszerének pontosításához javaslatokat tudunk adni az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Osztályának.

DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ
egyetemi adjunktus
Debrecen

Megjegyzések és szintezési útmutató a középiskolai új tankönyveknek a Geometriai feladatok gyűjteményéből választott feladataihoz

A szakközépiskolában 1978-tól, a gimnáziumban 1979-től kezdve kerülnek fokozatosan bevezetésre az új tantervek. Az új tantervekhez kapcsolódó új tankönyvek — a terjedelem csökkentése érdekében — aránylag kevés geometriafeladatot tartalmaznak. Ezt a hiányt a tanárok a Geometriai feladatok gyűjteményének használatával pótolhatják. Azonban ez a feladatgyűjtemény óriási anyagot ölel fel. Az első kötetében 3326, a második kötetében 1443 feladat található, amelyekből a tanároknak igen nehéz a legmegfelelőbb feladatokat kiválasztani. Ezt érezték a tankönyvírók is, ezért konkrétan ajánlanak az egyes témakörökhöz feladatokat.

A következőkben vázolom, hogy milyen következtetésre jutottunk a gimnáziumi I—II. osztályos és a szakközépiskolai I—III. osztályos matematikatankönyvek ilyen irányú elképzeléseinek vizsgálatával, illetve összehasonlításával, majd a szakközépiskolák III. osztályában tanító tanárok számára szeretnénk segítséget nyújtani a feladatok kiválasztásához a koordináta-geometriai feladatok szintezésével.

A gimnáziumok első és második osztályában két tankönyvtípus van forgalomban. Az egyik hagyományos felépítésű és hozzá feladatlapok csatlakoznak (szerzője dr. Korányi Erzsébet). A másik a munkatankönyv (szerzői: Mayerné

dr. Bartal Andrea és Pálfalvi Józsefné), amely az új anyag feldolgozását is a feladatok megoldására építi.

A szakközépiskolások hagyományos felépítésű tankönyvekből tanulnak, amelyekhez szintén vannak feladatlapok. (Az első és második osztályos tankönyvek szerzője Czapáry Endre, a harmadidik osztályos tankönyvet Bakó Zsuzsa írta.)

A gimnáziumi tankönyvek közül a Matematika I.-ben nincs utalás a Geometriai feladatok gyűjteményének használatára. A *Matematika I.-ban* a szerző nagyszámú (kb. 750), témakörönként tagolt és rendszerezett feladatot javasolt megoldásra a következő megoszlásban:

I. Egybevágósági transzformációk	kb. 80 feladat.
II. Kerületi szögek	kb. 80 feladat.
III. Pitagorász tétele	kb. 90 feladat.
IV. Hasonlóság	kb. 200 feladat.
V. Vektorok, szögfüggvények	kb. 300 feladat.

Az utóbbi témakörből a derékszögű háromszög megoldására visszavezethető feladatok száma aránylag nagy (kb. 200).

A Matematika-munkatankönyv első kötetében kb. 90 feladatot, a második kötetében kb. 80 feladatot javasolnak megoldásra a Geometriai feladatok gyűjteményéből. A feladatok száma aránylag kevés — ez a tankönyv szerkezetéből következik —, viszont még ezeket is tovább bontják kisebb témakörökre, így jól áttekinthetőek. Érdekes, hogy néhány, vektorokkal kapcsolatos egyszerűbb feladatot (Geometriai feladatok gyűjteménye I.-ből **3029., 3031., 3032., 3039.**) mindkét munkatankönyv tartalmazza.

A témakörönkénti bontás a következő:

A Matematika-munkatankönyv első kötetében:

— Térbeli ponthalmazokra vonatkozó feladatok	17 db.
— Szerkesztési feladatok	13 db.
— Háromszögekre és sokszögekre vonatkozó feladatok	10 db.
— Geometriai transzformációkkal kapcsolatos feladatok	24 db.
— A nevezetes vonalakkal és a Thalész-tétellel kapcsolatos feladatok	14 db.
— Vektorokra vonatkozó feladatok	10 db.

A Matematika-munkatankönyv második kötetében

— Egybevágósággal kapcsolatos feladatok	53 db.
— Pitagorász tételével kapcsolatos feladatok	24 db.
— Vektorokkal, hasonlósággal, trigonometriával kapcsolatos feladatok	18 db.

A szakközépiskolai tankönyvek közül a Matematika I. kb. 600, a Matematika II. kb. 500, a Matematika III. 950 feladatot javasol a Geometriai feladatok gyűjteményéből.

A témakörönkénti részletezés a következő:

A Matematika I-ben:

I.	Halmazok	kb. 70 feladat.
VI.	Geometriai ismeretek	kb. 110 feladat.
VII.	Egyenesre vonatkozó tükrözés	kb. 100 feladat.
VIII.	Pontra vonatkozó tükrözés	kb. 160 feladat.
IX.	Eltolás, vektorok	kb. 70 feladat.
X.	Geometriai transzformációk összefoglalása	kb. 100 feladat.

A Matematika II-ben:

I.	Pitagorász tétele	kb. 70 feladat.
II.	Pont körüli elforgatás	kb. 50 feladat.
III.	Egybevágóság	kb. 40 feladat.
IV.	Hasonlóság és alkalmazása	kb. 350 feladat.
V.	Szögfüggvények általánosítása	15 feladat.

A Matematika III-ban:

I.	Trigonometriai feladatok	214 feladat.
II.	Trigonometrikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	18 feladat.
III.	Koordináta-geometria	718 feladat.

Az első és második osztályos tankönyvek a felsorolt témákat még további részekre bontották, illetve a feladatokat résztémák szerint csoportosították, amelyekből már a tanároknak aránylag könnyű a választás.

A harmadik osztályos tankönyv nem bontja a témaköröket kisebb egységekre, túlzottan tömören közli a nagyszámú feladatot. Aránytalanul sok feladatot jelöl meg a szerző a koordináta-geometriához (718 db feladat). Ennyi feladat még akkor sem áttekinthető a tanárok számára, ha a szerző a kiegészítő anyaghoz tartozó feladatok megjelölésével differenciál. Úgy érzem, hogy a koordináta-geometriai feladatok szintezése feltétlenül indokolt a hatékonyabb tanítás érdekében.

Érdekesnek tartottam megkeresni azokat a feladatokat, amelyeket mind a gimnáziumi, mind a szakközépiskolai tankönyvek írói fontosnak tartanak az első és a második osztályban.

Szakközépiskola \ Gimnázium	Matematika-munkatankönyv I.	Matematika-munkatankönyv II.	Matematika II.
Matematika I.	12 feladat (vektorok)	4 feladat (vektorok)	32 feladat (tükrözés, vektorok)
Matematika II.	2 feladat (vektorok)	28 feladat	363 feladat

Az összehasonlítás azt mutatja, hogy vannak olyan feladatok, amelyek a szakközépiskolában az első osztályban szerepelnek, míg a gimnáziumban a második osztályban és fordítva. 21 db olyan feladatot találtam, amelyik három szerző tankönyvében előfordul, ezek a következők:

447., 452., 466., 952., 953., 960., 967., 987., 992., 999., 1001., 1005., 1053., 1063., 1570., 1575., 1577., 1641., 1659., 1663., 1664. feladatok a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetéből. Témaköreik: forgatás, kerületi és középponti szögek, Pitagorász tétele.

A tájékozódás megkönnyítésére, a tudásszintek figyelembevételével megpróbáltuk elkészíteni a szakközépiskolák harmadik osztálya számára a Geometriai feladatok gyűjteménye II. kötetéből megoldásra javasolt koordináta-geometriai feladatoknak egy szintezését. A szintezést külön végeztük el a törzsanyagra (A, B, C, D, E szintek) és a kiegészítő anyagra vonatkozólag (F, G, H szintek).

A törzsanyag és a kiegészítő anyag szintjeinek egymáshoz való viszonya a következő:

Törzsanyag	Kiegészítő anyag
A	F
B	
C	G
D	
E	H

Az egyes szintek jelentése a törzsanyagból:

A szint: alapfogalmak és alkalmazásuk.
B szint: egyszerűbb összefüggések felismerése és alkalmazása.
C szint: operatív alkalmazás, egymásra épülő ismeretek.
D szint: operatív alkalmazás maximális szinten, önálló felismerés.
E szint: kreativitás, alkotó tevékenység.

A feladatok szintekbe való besorolása nem egy-egyértelmű, merev kategorizálás. Célja tájékoztatás, tanácsadás. Tőle eltérő vélemények is lehetségesek.

A szintezésnél problémát okozott a kiegészítő anyag kérdése. Találtunk olyan feladatokat, amelyek megoldásához nem feltétlenül szükséges a kiegészítő anyag ismerete, pl. két egyenes szögének a meghatározásához. Ezeket a feladatokat (**739—742.**) mind a törzsanyagnál, mind a kiegészítő anyagnál szinteztük, annál is inkább, mert más, lényegében hasonló feladatok (pl. **875., 876., 1222.**) a törzsanyagban szerepeltek.

Néhány feladatnál indokolt volna a kiegészítő anyag háromszögjelzését kitenni: pl. az **1239., 1240., 1242., 1405.** feladatok a pontnak körre vonatkozó hatványával vagy a hatványvonallal kapcsolatosak. Az **1260.** és **1031.** *t)* feladatokban az affinitás szerepel. Hasonló a probléma az **1280.** feladattal is, mert annak egyszerűbb megoldása az egyenes normálegyenletének ismeretén alapul. Az **1301.** *d)—v)* feladatok megoldásához kiegészítő ismeretekre vagy az **1023., 1024., 1025.** feladatok előzetes megoldására volna szükség.

Nem szerencsés az **1218.** feladat beválasztása sem, mert bizonyítása nem egyszerű. Igaz, hogy a feladat megoldása lényegében megtalálható kidolgozva a Geometriai feladatok gyűjteményében, de ott is egy oldal terjedelmű, és egy nem túl gyakran alkalmazott trigonometriai összefüggés felhasználásán alapul.

Szintezési útmutató a szakközépiskolák III. osztálya számára koordináta-geometriai feladatokhoz
(a Geometriai feladatok gyűjteménye II. kötetéből)

A szintű feladatok

521., 530., 535., 537., 541., 542., 554., 555., 556., 557., 559., 560., 566., 568., 569., 570., 585., 599., 605., 606., 634., 635., 637., 695., 718., 799., 800., 801., 802., 812., 825., 835., 860., 861., 862., 1031. *a), b),* **1033., 1038., 1110., 1111., 1139., 1168., 1209., 1211., 1221.**

B szintű feladatok

519., 520., 522., 525., 526., 531., 533., 536., 538., 539., 540., 545., 546., 558., 561., 563., 564., 565., 567., 572., 573., 578., 597., 600., 603., 604., 607., 610., 611., 618., 619., 620., 638., 639., 641., 642., 643., 644., 661., 663., 674., 675., 696., 697., 700., 701., 702., 705., 706., 708., 710., 712., 714., 715., 717., 744., 745., 747., 754., 755., 757., 759., 761., 762., 770., 772., 773., 777., 803., 804., 806., 807., 809., 810., 811., 816., 817., 821., 826., 828., 829., 831., 832., 833., 841., 850., 864., 867., 868., 878., 881., 887., 894., 908., 961., 962., 964., 969., 974., 975., 998., 1028., 1031. *c)*, 1039., 1041., 1044., 1048., 1049., 1053., 1064., 1065., 1080., 1112., 1113., 1115., 1116., 1117., 1123., 1129., 1130., 1133., 1136., 1137., 1140., 1148., 1151., 1153., 1160., 1161., 1162., 1163., 1165., 1166., 1178., 1180., 1204., 1205., 1210., 1212., 1222., 1223., 1224., 1226., 1227., 1229., 1277., 1278., 1279., 1301., 1317., 1346., 1396., 1438.

C szintű feladatok

523., 524., 532., 534., 543., 544., 548., 549., 551., 562., 571., 574., 577., 584., 586., 587., 588., 590., 591., 593., 595., 596., 608., 609., 612., 614., 615., 616., 621., 622., 640., 645., 646., 647., 648., 649., 651., 653., 654., 656., 657., 658., 659., 660., 662., 664., 665., 666., 676., 678., 679., 681., 690., 698., 699., 703., 704., 707., 709., 711., 713., 716., 719., 723., 724., 726., 739., 740., 741., 742., 746., 748., 756., 758., 760., 763., 764., 765., 766., 769., 771., 774., 775., 778., 780., 781., 787., 805., 808., 813., 814., 815., 818., 819., 820., 824., 827., 834., 836., 837., 838., 839., 840., 842., 843., 844., 846., 848., 851., 856., 857., 865., 870., 873., 874., 879., 880., 883., 886., 888., 890., 891., 892., 895., 897., 905., 906., 907., 909., 912., 916., 959., 960., 963., 965., 966., 967., 968., 970., 976., 977., 978., 980., 983., 985., 986., 988., 990., 1003., 1029., 1034., 1035., 1040., 1042., 1043., 1045., 1046., 1051., 1052., 1054., 1055., 1058., 1059., 1061., 1062., 1066., 1067., 1074., 1081., 1114., 1118., 1119., 1120., 1122., 1124., 1125., 1126., 1128., 1131., 1134., 1135., 1141., 1142., 1143., 1145., 1147., 1149., 1150., 1152., 1156., 1157., 1158., 1164., 1167., 1169., 1170., 1171., 1174., 1175., 1179., 1181., 1182., 1206., 1207., 1208., 1213., 1214., 1220., 1225., 1228., 1230., 1231., 1233., 1234., 1235., 1241., 1280., 1281., 1282., 1283., 1284., 1286., 1287., 1288., 1289., 1290., 1294., 1298., 1299., 1306., 1310., 1312., 1313., 1314., 1318., 1319., 1328., 1329., 1333., 1345., 1347., 1348., 1360., 1367., 1368., 1380., 1381., 1390., 1394., 1395., 1397., 1398., 1416., 1439.

D szintű feladatok

547., 553., 579., 589., 592., 594., 598., 601., 602., 613., 617., 623., 624., 625., 626., 627., 628., 630., 631., 650., 652., 655., 667., 672., 673., 677., 680., 682., 683., 684., 687., 688., 720., 725., 743., 749., 750., 767., 768., 776., 779., 782., 788., 822., 823., 830., 847., 849., 852., 853., 854., 855., 858., 859., 869., 875., 876., 882., 884., 889., 893., 896., 899., 900., 903., 904., 910., 911., 913., 914., 915., 918., 971., 979., 981., 982., 984., 987., 989., 992., 993., 996., 1000., 1001., 1002., 1030., 1047., 1050., 1056., 1057., 1060., 1063., 1068., 1071., 1075., 1077., 1078., 1127., 1144., 1146., 1154., 1155., 1159., 1176., 1177., 1183., 1184., 1185., 1215., 1216., 1219., 1232., 1246., 1280., 1284., 1285., 1289., 1292., 1296., 1297., 1302., 1303., 1304., 1305., 1307., 1308., 1311., 1315., 1316., 1320., 1322., 1323., 1324., 1330., 1331., 1332., 1334., 1335., 1336., 1337., 1338., 1339., 1340., 1349., 1358., 1359., 1361., 1362., 1365., 1366., 1391., 1392., 1406., 1407., 1408., 1409., 1410., 1411., 1415., 1417., 1418.,

E szintű feladatok

550., 552., 629., 632., 633., 685., 686., 689., 722., 727., 845., 866., 871., 872., 877., 885., 898., 901., 917., 919., 972., 991., 994., 995., 997., 1072., 1073., 1076., 1079., 1173., 1217., 1218., 1236., 1237., 1238., 1243., 1295., 1325., 1341., 1363., 1364., 1369., 1370., 1382., 1424.

F szintű feladatok

735., 736., 739., 740., 741., 742., 753., 923., 924., 925., 926., 928., 949., 951., 952., 954., 1031. *d—k)*, 1260.

G szintű feladatok

737., 738., 920., 927., 929., 930., 932., 933., 934., 935., 937., 938., 941., 950., 953., 955., 956., 957., 1031. *l)—v)*, 1239., 1240., 1242., 1280., 1281., 1285., 1405.

H szintű feladatok

921., 922., 931., 936., 939., 940., 942., 943., 944., 1309.

DR. URBÁN JÁNOS
főelőadó, OPI

Javaslat a gimnáziumi „A" változatú fakultatív matematika-tanterv III. osztályos Analízis I. témakörének tanításához

(Megjegyzés a 13 331/A sz. tankönyv használatához)

A címben említett tankönyv 332. és 333. oldalán található folytonosság definíció ebben a formájában szabatos és helyes ugyan, de túl nagy ugrást jelent a szemléletes folytonosság-fogalomhoz képest. A tankönyvben az előző példák, feladatok mind olyan függvényekkel kapcsolatban vizsgálják a folytonosság kérdését, amelyek intervallumokon, vagy intervallumok egyesítésén vannak értelmezve. Így szemléletesen készítik elő azt a fogalmat, amelyet a tanulók számára — akik itt találkoznak először a folytonosság fogalmával — az olyan függvényekre érdemes megfogalmazni, amelyek értelmezési tartománya intervallumok egyesítése és egy képhalmaza a valós számok halmaza, a következő módon:

Legyen f egy olyan függvény, amely értelmezve van az a hely egy környezetében! Az f függvényt az a helyen folytonosnak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha x az a-hoz δ-nál közelebb van, akkor $f(x)$ és $f(a)$ eltérése ε-nál kisebb, azaz

$$\text{ha} \quad |x-a| < \delta, \quad \text{akkor} \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

A későbbiek során természetes módon adódik a fogalomnak az a kiterjesztése, hogy ha az a helynek csak egyik oldali környezetében van értelmezve a függvény, akkor a definícióban szereplő első egyenlőtlenség teljesülését is csak a megfelelő oldali környezetben vizsgálhatjuk, tehát ezekre az x-ekre követeljük meg a második egyenlőtlenség igaz voltát.

Ily módon olyan fogalomhoz jutunk, amely összhangban van azzal a képpel, ami a tanulókban a folytonosság fogalmáról intuitíve kialakult: folytonos függvény grafikonja folytonos görbe.

A könyvben említett definíciót esetleg végső összegezésként, a fogalom egy lehetséges további kiterjesztéseként, kiegészítő anyagként lehet tárgyalni. Ehhez kapcsolódva érdemes csak megemlíteni, hogy például az említett tankönyv 429. oldalán található **181.** feladatban szereplő függvények mindegyike folytonos (némileg ellentétben a szemléletes, intuitív folytonosság-fogalommal).

Sztrókayné Földvári Vera

Mátrixok

A szakkörifüzet-sorozat ezen kötete 8. osztályos és középiskolás (I-II. osztály) tanulók számára készült. Ismerteti a mátrix fogalmát, példákon mutatja be felhasználhatóságát feladatok megoldásában mind az aritmetika, az algebra, mind a geometria területén. Tárgyalja az egyenletrendszerek megoldásában való alkalmazását, foglalkozik a determináns fogalmával, szerepével, felhasználásával. Megfelelő feladatok biztosítják az elméleti anyag gyakorlását. (1990)

DR. SZEPESSY BÁLINT
főiskolai docens
Eger

Jelentés a Tanárképző Főiskolák 1981. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről

A verseny a Ho Si Minh Tanárképző Főiskolán (Egerben) került megrendezésre 1981. április 27-én és 28-án, amelyen a Bessenyei György TKF (Nyíregyháza), a Ho Si Minh TKF Kihelyezett Tagozata (Budapest), a Juhász Gyula TKF (Szeged), a Pécsi TKF, a Szombathelyi TKF és a Ho Si Minh TKF (Eger) öt-öt hallgatója vett részt.

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének felkérése alapján a versenybizottság

elnöke: Hódi Endre osztályvezető, OPI;
titkára: Dr. Szepessy Bálint főiskolai docens, Eger;
tagjai: Kamarás Lajos főiskolai docens, Pécs;
Molnár Sándor főiskolai tanársegéd, Eger;
Pogáts Ferenc főiskolai adjunktus, Budapest;
Rozgonyi Tibor főiskolai tanársegéd, Nyíregyháza;
Sebestyén József főiskolai tanársegéd, Szombathely;
Szerényi Tibor főiskolai docens, Szeged.

A kitűzött feladatok megoldására április 27-én délelőtt 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére. Délután városnézés volt a program. Április 28-án került sor a megoldások ismertetésére és az ünnepélyes eredményhirdetésre.

A versenybizottság 1 első, 2 második és 2 harmadik díjat adott ki, további 12 versenyzőt dicséretben részesített.

I. díjat kapott:

Ökrös László, Eger.

II. díjat kapott:

Poór József, Szombathely;
Steierlein István, Pécs.

III. díjat kapott:

Erdelyi Gábor, Nyíregyháza;
Nagy Zoltán, Eger.

Dicséretben részesült:

Ambrus Gabriella,	Budapest;
Csapó Klára,	Budapest;
Darázs Katalin,	Szeged;
Fodor Tibor,	Pécs;
Gohér Katalin,	Budapest;
Horváth Katalin,	Szeged;
Kiss Lajos,	Nyíregyháza;
Mikita István,	Nyíregyháza,
Németh Csilla,	Szombathely;
Rubóczky György,	Budapest;
Sallai János,	Eger;
Sőti Judit,	Eger.

A Bolyai János Matematikai Társulat 1000 Ft-os különdíját

Ökrös László (Eger),

a 600 Ft-os, illetve 400 Ft-os különdíját

Poór József (Szombathely), illetve
Steierlein István (Pécs) nyerte.

A Bolyai János Matematikai Társulat Heves megyei Tagozata könyvjutalomban részesítette

Ambrus Gabriella (Budapest),
Fodor Tibor (Pécs),
Horváth Katalin (Szeged),
Kiss Lajos (Nyíregyháza),
Németh Csilla (Szombathely) és
Sallai János (Eger)

versenyzőket.

A kitűzött feladatok és megoldásuk

1. feladat

Adott kör belsejében kiválasztunk egy tetszés szerinti, de a kör középpontjától különböző P pontot. A körnek a P ponton átmenő AB húrjai közül melyik az, amelyre az AP^2+BP^2 összeg legnagyobb, és melyik az, amelyre legkisebb?

Megoldás:

A vizsgált összeget alakítsuk át a következő módon:

(1) $$AP^2+BP^2 = (AP+BP)^2-2\cdot AP\cdot BP$$

és

(2) $$AP^2+BP^2 = (AP-BP)^2+2\cdot AP\cdot BP.$$

Figyelembe véve, hogy egy körhöz egy (külső vagy belső) pontból húzott szelőszakaszok szorzata állandó, az (1) és (2) egyenlőségek jobb oldalán a második tag állandó. Ezért (1) alapján a vizsgált összeg nyilván akkor maximális, ha $AP+BP$ maximális, ez viszont csak akkor teljesül, ha a P ponton áthaladó húr átmérő. (2) szerint a vizsgált összeg akkor minimális, ha $(AP-BP)^2$ minimális, azaz $AP=BP$, tehát a P pont az AB húr felezőpontja.

2. feladat

Jelentsen (a_i) $(i=1, 2, \ldots)$ olyan számtani sorozatot, és (b_i) olyan mértani sorozatot, amelyekre

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_1 \neq a_2 \quad \text{és} \quad a_1 a_2 > 0.$$

Bizonyítsa be, hogy ha $a_1>0$, akkor $a_n<b_n$ $(n=3, 4, 5, \ldots)$; ha pedig $a_1<0$, akkor $a_n>b_n$.

Megoldás:

Mivel $a_1=b_1$ és $a_2=b_2$, ezért

$$a_n = a_1+(n-1)(a_2-a_1)$$

és

$$b_n = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-1};$$

azaz

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1+(n-1)\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-1}}. \tag{1}$$

A Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazva az

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-1} = \left[1+\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\right]^{n-1}$$

egyenlőség jobb oldalára,

$$\left[1+\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\right]^{n-1} > 1+(n-1)\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right),$$

s ezt az (1)-gyel összevetve $\frac{a_n}{b_n}<1$ adódik.

Ha $a_1<0$, akkor $b_n=a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-1}<0$ (hiszen $a_1\cdot a_2>0$ akkor és csak akkor, ha $\frac{a_2}{a_1}>0$); tehát

$$a_n > b_n.$$

Ha $a_1>0$, akkor ugyanúgy adódik, hogy

$$a_n < b_n.$$

Megjegyzés: a Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazható, hiszen $0<\frac{a_2}{a_1}=1+\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)$-ből adódik, hogy $\frac{a_2}{a_1}-1>-1$; és $a_1\neq a_2$ miatt $\frac{a_2}{a_1}\neq 1$.

3. feladat

Adott ABC háromszög AB és AC oldalának A csúcson túli meghosszabbítására A-ból kiindulva felmérjük a BC oldalt, a BC és BA oldalak B csúcson túli meghosszabbítására B-ből kiindulva felmérjük a CA oldalt, végül a CA és CB oldalak C csúcson túli meghosszabbítására C-ből kiindulva felmérjük az AB oldalt. Az így felmért szakaszoknak az ABC háromszög csúcsaitól különböző végpontjai konvex hatszöget határoznak meg.

Bizonyítsa be, hogy ennek a hatszögnek a területe legalább 13-szorosa az ABC háromszög területének!

Mely esetben pontosan 13-szorosa?

Megoldás:

Az adott háromszög területe legyen $T(ABC)=t$.

Ekkor

$$T(ABC) = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{2} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{2t}{ab};$$

$$T(ABC) = \frac{bc\cdot\sin\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2t}{bc};$$

$$T(ABC) = \frac{ac\cdot\sin\beta}{2} \Rightarrow \sin\beta = \frac{2t}{ac}.$$

Az ábra és az előzőek alapján

$$T(AP_1P_6)=\frac{a^2\sin\alpha}{2}=\frac{a^2}{bc}\cdot t.$$

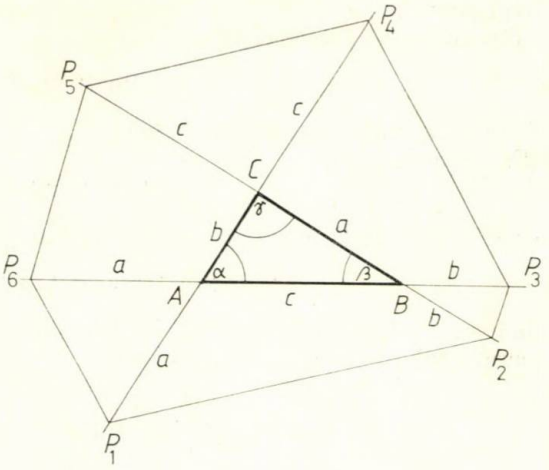
Hasonlóan adódik, hogy

$$T(AP_3P_4)=\frac{(b+c)^2}{bc}\cdot t,$$

$$T(BP_2P_3)=\frac{b^2}{ac}\cdot t,$$

$$T(BP_5P_6)=\frac{(a+c)^2}{ac}\cdot t,$$

$$T(CP_4P_5)=\frac{c^2}{ab}\cdot t$$



1. ábra

és

$$T(CP_1P_2)=\frac{(a+b)^2}{ab}\cdot t.$$

A konvex hatszög területét T-vel jelölve:

$$T=T(AP_1P_6)+T(AP_3P_4)+T(BP_2P_3)+T(BP_5P_6)+T(CP_4P_5)+T(CP_1P_2)-2t=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{bc}+2+\frac{a^2+b^2+c^2}{ac}+2+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab}+2-2\right)\cdot t=$$

$$=\left(\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+4\right)\cdot t.$$

Mivel $(a-b)^2\geqq 0$, amiből $a^2+b^2\geqq 2ab$ és $a>0$, $b>0$; ezért $\frac{a^2+b^2}{ab}\geqq 2$. Ugyanígy $\frac{b^2+c^2}{bc}\geqq 2$ és $\frac{a^2+c^2}{ac}\geqq 2$. Azt kell még belátni, hogy $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geqq 3$, azaz $a^3+b^3+c^3-3abc\geqq 0$ (hiszen $a>0$, $b>0$, $c>0$).

A bal oldal szorzattá alakítva:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\cdot[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2];$$

ami valóban nem kisebb, mint nulla, mert mindegyik tényezője nemnegatív.

Ezér t $T\geqq(2+2+2+3+4)\cdot t=13t$.

Az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $a-b=a-c=b-c=0$, vagyis amikor $a=b=c$.

4. feladat

Adja meg a következő egyenlet egzakt megoldását:

(1) $$x^4-4x^3-4x^2+25x-20=0.$$

Megoldás:

(1)-ből $x=y+1$ helyettesítéssel az

$$y^4-10y^2+9y-2=0 \tag{2}$$

hiányos negyedfokú egyenletet kapjuk.

Mint ismeretes, az

$$y^4+py^2+qy+r=0 \tag{3}$$

egyenlet bal oldala felbontható a következőképpen:

$$y^4+py^2+qy+r=(y^2+ay+b)(y^2-ay+c),$$

ahol a a $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$ harmadfokú egyenlet (a (3) harmadfokú rezolvense) egyik gyökének a négyzetgyöke,

$$b=\frac{1}{2}\left(a^2+p-\frac{q}{a}\right); \quad c=\frac{1}{2}\left(a^2+p+\frac{q}{a}\right).$$

Az $y^2+ay+b=0$ és az $y^2-ay+c=0$ másodfokú egyenletek gyökei adják (3) gyökeit.

Az előzőeket alkalmazzuk (2)-re!

$z^3-20z^2+108z-81=0$ (2) harmadfokú rezolvense. Ez az egyenlet algebrailag megoldható; egy megoldása: 9. Így $a=3$; $b=\frac{1}{2}(9-10-3)=-2$; $c=\frac{1}{2}(9-10+3)=1$.

Az $y^2+3y-2=0$ és $y^2-3y+1=0$ gyökei adják (2) gyökeit. Ezek $y_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; $y_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Az $x=y+1$ helyettesítést figyelembe véve (1) gyökei

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}; \quad x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.$$

5. feladat

Szerkesszen derékszögű háromszöget, ha adott Feuerbach körének sugara és az egyik befogójához hozzáírt körének sugara!

Megoldás:

Jelöljük a szerkesztendő háromszög Feuerbach körének sugarát r_F-fel, az a, illetve b befogókhoz hozzáírt kör sugarát r_a-val, illetve r_b-vel; a c átfogóhoz tartozó súlyvonalat, illetve magasságvonalat s_c-vel, illetve m_c-vel!

Tudjuk egyrészt, hogy derékszögű háromszög esetén $2r_F=s_c$ és $2s_c=c$, így $c=4r_F$. Továbbá mivel $r_a=s-b$, $r_b=s-a$ $\left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$, ezért $r_a+r_b=2s-a-b=c$, azaz $r_b=c-r_a$. Másrészt a háromszög t területére:

$$t=\frac{1}{2}cm_c=r_a(s-a),$$

de

$$s-a=r_b,$$

tehát

$$2t=cm_c=2r_ar_b,$$

vagy másképpen

$$c:r_a=2r_b:m_c,$$

amiből m_c mint negyedik arányos megszerkeszthető. Végül ismerve c és m_c szakaszokat, a c Thalész-köre segítségével megszerkesztjük a derékszögű háromszöget.

$\left(\text{Mivel } r_b = c - r_a, \text{ ezért kell, hogy } r_F > \frac{r_a}{4} \text{ legyen.}\right)$

6. feladat

Állapítsa meg $|36^p - 5^q|$ minimumát, ahol p és q pozitív egész számokat jelentenek!

Megoldás:

$$|36^p - 5^q| \text{ utolsó jegye } \begin{cases} 1, & \text{ha } 36^p > 5^q; \\ 9, & \text{ha } 36^p < 5^q. \end{cases}$$

$|36^p - 5^q|$ nem lehet sem 1, sem 9.
$36^p - 5^q = 1$-ből az következne, hogy $(6^p+1)(6^p-1) = 5^q$; márpedig 6^p+1 nem lehet osztója 5^q-nak, mert utolsó jegye 7. $5^q - 36^p = 9$-ből $3 | 5^n$ következne. $36 - 5^2 = 11$, ezért a kérdéses minimum 11.

7. feladat

Jelöljön n egész számot, x valós számot, $[z]$ pedig jelentse a z valós szám egész részét!

Bizonyítsa be, hogy ha az

$$[[nx]x] = [nx] + n - 1$$

egyenlőség fennáll minden $n \neq 0$ esetén, akkor $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Megoldás:

Mivel $[[nx]x] = [nx] + n - 1$, ezért az $[nx] + n - 1 \leqq [nx]x < [nx] + n$ egyenlőtlenség igaz.

Ebből adódik, hogy

$$1 < \frac{[nx](x-1)}{n} \leqq 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{ha} \quad n < 0,$$

illetve

$$1 - \frac{1}{n} \leqq \frac{[nx](x-1)}{n} < 1, \quad \text{ha} \quad n > 0.$$

Mivel $x \neq 1$ (erről helyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk), ezért az előzőekből

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[nx]}{n} = \frac{1}{x-1}. \tag{1}$$

Az egész rész definíciója alapján tudjuk, hogy $nx - 1 < [nx] \leqq nx$ fennáll minden n egészre és tetszőleges x-re, ezért

$$x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leqq x, \quad \text{ha} \quad n > 0, \quad \text{míg} \quad x \leqq \frac{[nx]}{n} < x - \frac{1}{n}, \quad \text{ha} \quad n < 0.$$

Mind a két esetben

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[nx]}{n} = x. \tag{2}$$

Az (1)-ből és (2)-ből $x^2-x-1=0$ adódik, azaz $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vagy $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ha $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ és $n=1$, akkor $[[nx]x]=[-x]=0$, míg $[nx]+n-1=-1$. Így ebben az esetben nem teljesül a feltétel. Ezért $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ az egyetlen lehetséges x érték.

Könnyen igazolható, hogy az $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ érték kielégíti az adott egyenletet.

Tudjuk, hogy $\alpha-1=\frac{1}{\alpha}$. Tetszőleges n egész számra

$$n\alpha-1 < [n\alpha] < n\alpha.$$

Mivel $\alpha>1$, ezért $n\alpha-1>n\alpha-\alpha$, tehát $(n-1)\alpha<[n\alpha]<n\alpha$, ahonnan $\alpha>0$ miatt $n-1<[n\alpha]\cdot\frac{1}{\alpha}<n$, azaz $n-1<[n\alpha](\alpha-1)<n$, ebből pedig $[n\alpha]+n-1<[n\alpha]\alpha<[n\alpha]+n$. Mivel $[n\alpha]+n-1$ és $[n\alpha]+n$ két szomszédos egész szám, ezért az utolsó egyenlőtlenség akkor és csak akkor igaz, ha

$$[[n\alpha]\alpha] = [n\alpha]+n-1.$$

Az α szám tehát valóban kielégíti az adott egyenletet.

GARÁDI JÁNOS
tudományos munkatárs
Budapest

Beszámoló a Középiskolások Számítástechnikai Versenyeiről

I. Bevezetés

Az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézeténél 1974-ben néhány lelkes számítástechnikai szakember elhatározta, hogy az általa szerzett tapasztalatokat a számítástechnika iránt érdeklődők részére valamilyen írásos formában átadja. Ezért középiskolások számára könnyen kezelhető, hozzáférhető és elsajátítható anyagot állítottunk össze.

Fő céljaink a következők voltak:

— az algoritmikus gondolkodásmód alapjainak elsajátítása,

— ismeretterjesztő tevékenységet kifejtve szétoszlassuk a „computer" mint gondolkodó gép körül kialakult titokzatosságot és legendát.

Szakkörök keretében anyagunk alapján szerveztük a budapesti középiskolákban az oktatást. A későbbiekben elhatároztuk, hogy az általunk lebonyolított számítástechnikai oktatás eredményességének megállapítására versenyt rendezünk.

Kísérleti jelleggel 1978-ban került sor a versenyre. A szóbeli vetélkedőre 5 iskolát hívtunk meg, és a díjakért 8 csapat (1 csapat 3 főből állt) versengett. A vetélkedő igen jó eredményeket hozott. Az első helyezést elért csapat a megszerezhető pontok 85%-át érte el, míg az utolsó helyezett csapat is 65%-ot teljesített.

A versenyen kiderült, hogy azok az anyagok, amelyekből a csapatok felkészültek (az általunk ajánlott szakanyagokon kívül) sokszor egymásnak ellentmondóak voltak, ami megnehezítette a szakmai zsüri munkáját.

II. Rövid visszatekintés

Mivel Budapesten elég sok helyen folyt már a számítástechnikai oktatás, 1979-ben úgy döntöttünk, hogy fővárosi szinten rendezzük meg a versenyt a középiskolák tanulói részére.

A verseny meghirdetésekor olyan feladatok összeállítása volt célunk, amelyek lehetővé tették:

— a rendszeres számítástechnikai oktatásban nem részesülő tanulók indulását,
— a saját számítógéppel nem rendelkező középiskolák részvételét,
— olyan diákok benevezését a versenyre, akik programozási nyelvismerettel nem rendelkeznek.

Az I. Középiskolai Számítástechnikai Versenyt a KISZ Budapesti Bizottságának támogatásával az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete szervezte és bonyolította le. A meghívott 56 budapesti középiskola közül 10 gimnázium és 2 szakközépiskola küldte el 60 diákját a versenyre. A verseny tapasztalatai alapján a következő években már egy-két nagyobb város középiskoláinak tanulóit is meghívtuk a vetélkedőre.

A II. és a III. Középiskolai Számítástechnikai Verseny megszervezésében és lebonyolításában részt vett:

— a KISZ Központi Bizottságának Középiskolai és Szakmunkástanuló osztálya,
— a KISZ Budapesti Bizottsága,
— az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetének KISZ Bizottsága.

Az előző és az idei évben megrendezett versenyen a részt vevő középiskolák és tanulók számának alakulását az alábbi két táblázat tartalmazza.

Az 1980. évi verseny

	Budapest		Vidék		Összesen	
	gimnázium	szakközépiskola	gimnázium	szakközépiskola	gimnázium	szakközépiskola
Meghívott	41	20	10	3	51	23
Részt vett	10	3	1	1	11	4
Csapat	39	22	1	3	40	25
Tanuló	114	44	3	9	117	53

Egy csapat 2 és 3 versenyzőből állt.

Az 1981. évi verseny

	Budapest		Vidék		Összesen	
	gimnázium	szakközépiskola	gimnázium	szakközépiskola	gimnázium	szakközépiskola
Meghívott	41	14	20	6	61	20
Részt vett	12	3	7	3	19	6
Csapat	67	28	19	22	86	50
Tanuló	134	56	38	44	172	100

Egy csapat 2 versenyzőből állt.

Minden résztvevő kitöltött egy statisztikai adatlapot, melynek adatait jelenleg dolgozzuk fel számítógépen, és az itt kapott eredményeket minden érdekelt részére megküldjük.

III. Néhány régebbi feladat

Az alábbiakban speciális számítástechnikai előismereteket nem igénylő és az információ feldolgozása elméletének szempontjából érdekes feladatokat mutatunk be.

1. feladat (1979. évi verseny I. fordulójának 2. feladata)

A mágnesszalag 9 csatornás: a szalagra egyszerre rögzített egységnyi információ egy 8 bites (1 byte) memóriakarakter a hozzá tartozó paritás bittel (összesen 9 bit).

A paritás bit funkciója a hibaellenőrzés. A 8 bites tényleges információhoz a gép automatikusan hozzáír egy bitet úgy, hogy a byte-ban levő 1-esek száma páros vagy páratlan legyen.

A feladatban a keresztirányú paritás bit legyen páros. Egy fizikai blokk több (k) byte-ból áll, melyet egy hosszirányú paritás byte zár le, amelynek definíciója analóg a keresztirányú paritás bitjével. A 9 sort úgy egészíti ki egy-egy bittel, hogy a sorokban az 1-esek száma páros legyen (lásd az ábrát!).

Ez az eljárás lehetővé teszi-e a tárolás ideje alatt meghibásodott bitek automatikus kijavítását; ha igen, hány hibás bit kijavítása lehetséges?

Megjegyzés: a paritás bitek is elromolhatnak!

	információ hordozó byte-ok										hosszirányú paritás byte
8 információ hordozó bit	1	0	0	1	0	1	0	0	.	.	1
	0	1	0	0	1	0	0	0	.	.	0
	1	0	1	0	0	1	0	0	.	.	1
	0	1	1	1	1	1	0	0	.	.	1
	1	0	1	0	0	0	0	0	.	.	0
	0	1	0	1	0	1	0	0	.	.	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	.	.	1
	1	1	1	0	0	0	1	0	.	.	0
keresztirányú paritás bit	1	0	0	1	0	0	1	0	.	.	1

1. ábra

2. feladat (1980. évi verseny I. fordulójának 3. feladata)

A postai telexen az információ továbbítására 5 csatornás lyukszalag szolgál, egy megjeleníthető (kinyomtatott) jelet tehát 5 biten ábrázolunk. A —00000—

bitsorozat az üres lyukszalag, ezért információ továbbítására alkalmatlan. Így 31 jel ábrázolható.

Mivel a telexen továbbítandó jelek (betűk, számok, egyéb írásjelek) száma nagyobb, mint 31, ezért fenntartanak két úgynevezett váltójelet, amelyek nyomtatásban nem jelennek meg; ezek (a számváltó —11011— és a betűváltó —11111— bitsorozatai) funkciója a következő: a telexgép a számváltó lyukkombinációt követő nem váltó jeleket mindaddig szám és egyéb jelként értelmezi (és jeleníti meg), amíg egy betűváltó nem követi, ezután ugyanezeket a jeleket betűként értelmezi.

Tehát a nem váltó jel (ilyenből 29 van) értelmezése az őt legutoljára megelőző váltójeltől függ.

Kérdéseink a következők:

a) Legalább hány jelet kell váltójelként lefoglalni, ha 151 különböző jelet akarunk továbbítani telexen?

b) Legfeljebb hány különböző jelet tudunk váltójelek közbeiktatásával ábrázolni, és ehhez hány váltójel szükséges?

c) Lehetséges-e tetszőleges nagy jelkészletű (például 2000 betűből írt szövegek) írásos anyagok továbbítása 5 csatornás lyukszalagon?

3. feladat (1980. évi verseny döntőjének 1. feladata)

a) Adjunk meg olyan eljárást, amely a számítógépben az

A(1), A(2), A(3), A(4), A(5)

rekeszekben elhelyezett különböző értékű számokat növekvő sorrendben elhelyezi a

B(1), B(2), B(3), B(4), B(5)

rekeszekbe, és az

A(1), A(2), A(3), A(4), A(5)

számok tetszőleges nagyságrendi viszonya esetén algoritmusunk legfeljebb hét összehasonlítást végez el!

b) Lehetséges-e olyan eljárást készíteni, amely ugyanezt a feladatot legfeljebb hat összehasonlítással oldja meg?

IV. A verseny jellege és menete

A versenyeknél fő törekvésünk a csapatmunka és a jó együttműködés (csapaton belül) kialakítása volt, ami a gyakorlati munka követelményeinek is leginkább megfelel. Egyedül a csapatok tagjainak a létszáma volt idáig kérdéses. A résztvevők számától függően több fordulóból álltak a versenyek.

Az első fordulóban a verseny feladatai 5 témakört öleltek fel:

1. totószelvény kitöltése számítástechnikai ismeretek köréből,
2. számítástechnikai szöveg értelmezése,
3. problémák a számítástechnika területéről,
4. feladat megoldása blokkdiagram segítségével,
5. blokkdiagram működésének ellenőrzése és az előforduló hibák kijavítása.

A feladatok megoldására két óra állt a versenyzők rendelkezésére.

A második fordulóban (a döntőben) a csapatoknak először display terminálon játékos feladatot kellett megoldaniuk, melynek elvégzéséhez fél óra állt rendelkezésre. A döntő második részében 1980-ban három és 1981-ben négy, a számítástechnika különböző területéről való, mind gyakorlati, mind elméleti szempontból érdekes feladatot kellett megoldani a versenyzőknek két óra alatt.

Az első fordulót a jelentkezők középiskoláiban tartottuk, míg a döntőre az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet IBM 3031-es nagyszámítógépén került sor.

A beérkezett dolgozatokat egy tíz főből álló bizottság értékelte ki. A döntőre behívott versenyzők létszámánál korlátozást jelentett a rendelkezésünkre álló terminálok száma.

V. Az 1981. évi verseny eredménye

Ebben az évben május 4-én került sor a döntő megrendezésére, melyre 20 csapat tanulóit hívta meg a versenybizottság, amelynek

elnöke: Békéssy András, a matematikai tudományok kandidátusa,
titkára: Garádi János tudományos munkatárs,
tagjai: Knuth Előd, a matematikai tudományok kandidátusa,
Krámli András, a matematikai tudományok kandidátusa,
dr. Lengyel Tamás tudományos munkatárs,
dr. Ratkó István tudományos munkatárs voltak. A versenybizottság 1 első, 2 második, 1 harmadik, 4 negyedik, 4 ötödik és 3 hatodik díjat adott ki.

A díjazottak névsora a következő:

I. díjat kapott:

a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályának csapata, **Gellér János** és **Tóth Viktor.**

II. díjat kapott:

— a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. osztályának csapata, **Pásztor Szilárd** és **Quittner Gusztáv,**
— a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályának csapata, **Kolonits Zoltán** és **Selmeczy Péter.**

III. díjat kapott:

a miskolci Földes Ferenc Gimnázium IV. osztályának csapata, **Halász Péter** és **Király Zoltán.**

IV. díjat kapott:

— a veszprémi Lovassy László Gimnázium IV. osztályának csapata, **Csere Kálmán** és **Mészáros Gábor,**
— az egri Alpári Gyula Közgazdasági Szakközépiskola IV. osztályának csapata, **Oravecz Rita** és **Kovács József,**
— a budapesti Piarista Gimnázium IV. osztályának csapata, **Fábry Géza** és **Lukács János,**
— a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium III. osztályának csapata, **Csillag Luca** és **Tardos Gábor.**

V. díjat kapott:

— a zalaegerszegi Csány László Közgazdasági Szakközépiskola IV. osztályának csapata, **Hermann Károly** és **Nagy László,**
— a debreceni KLTE Gyakorló Gimnáziuma IV. osztályának csapata, **Marchhart Pál** és **Szilágyi Sándor,**
— a budapesti I. István Gimnázium IV. osztályának csapata, **Berki Endre** és **Bíró Béla**
— a budapesti Teleki Blanka Gimnázium IV. osztályának csapata, **Ivánka Attila** és **Lendvai Ferenc.**

VI. díjat kapott:

— a kecskeméti Katona József Gimnázium IV. osztályának csapata, **Bozó Győző** és **Petrányi László,**
— a budapesti Kvassay Jenő Ipari Szakközépiskola IV. osztályának csapata, **Pál Enikő** és **Prajczer Tamás,**
— a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium III. osztályának csapata, **Kende Ágnes** és **Poór László.**

A versenyzők részére felajánlott díjakat:
Gertler János, a műszaki tudományok doktora,
dr. Bathó Ferenc, a KISZ KB osztályvezető-helyettese,
Hencsey Gusztáv tudományos titkár
adta át.

VI. Befejezés

A szervező bizottság nevében ez úton is szeretném kifejezni köszönetemet a középiskolák igazgatóinak és szaktanárainak, hogy lehetővé tették a tanulók részvételét és felkészítését a versenyre.

Külön köszönet jár az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, valamint a KISZ Központi Bizottsága Középiskolai és Szakmunkástanuló Osztálya vezetőinek és munkatársainak, akik lehetővé tették a vetélkedők megfelelő szintű lebonyolítását.

Jövőre országos jelleggel szeretnénk megrendezni a versenyt, melyhez minden érdekelt támogatását kérjük.

LASZTÓCZI GYULA
vezető tanár
Budapest

Rajzoljunk a térbe!

A matematika tanításának egyik igen fontos feladata a térszemlélet fejlesztése, a helyes térlátás kialakítása. Ehhez a munkához jelentős segítséget adnak a különböző térbeli modellek; ezek tanulmányozása nagymértékben megkönnyíti adott térbeli problémák áttekintését és ennek nyomán megoldását. A térbeli modellek gyakori tanulmányozása idővel olyan belső térlátás kialakulásához vezet el, amely már modellek tanulmányozása nélkül is lehetővé teszi a térbeli viszonyok elképzelését, térgeometriai problémák megoldását.

A sok iskolában megtalálható matematika-szertárak többsége bőven tartalmaz különböző térbeli modelleket. Bármilyen gazdag is azonban egy szertár modellgyűjteménye, az ott található testek nem egy-egy órán felvetődő problémához készültek, pedig igen sokszor éppen ilyen, adott problémához készülő szemléltető eszközökre lenne szükség. Ha a tanár a szertárban összegyűjtött testek között nem talál megfelelőt, akkor vagy eleve lemond a szemléltetésről, vagy pedig maga próbál térbeli modellt készíteni. Sajnos általában az előbb említett lehetőség következik be, mert többnyire nincs kéznél megfelelő anyag és eszköz modellek elkészítéséhez. (Legyünk optimisták, és tételezzük föl, hogy bőven jutna idő e foglalatosságra!) Milyen jó lenne, ha térbeli ábrákat is úgy lehetne rajzolni, mint a síkbelieket! Ez sok problémát megoldana.

Magam is sokszor gondoltam erre. Egyszer aztán egy kiállításon láttam egy furcsa képet (amelyet akár tárgynak is nevezhetnénk). Növényt ábrázolt a „kép", a növény ágai, indái furcsa módon térben rajzolódtak ki azáltal, hogy egymás mögé helyezett üveglapokra festették a kép különböző részleteit. Hazamentem és rögtön kísérletezni kezdtem a rendelkezésemre álló eszközökkel, később pedig különböző anyagokat, eszközöket vásárolva és kipróbálva megkíséreltem kialakítani a térbeli szemléltető ábrák rajzolásának módszerét. Az alábbiakban e tárgyban szerzett tapasztalataimat szeretném közreadni, remélve, hogy másokat is sikerül megnyernem térbeli rajzok készítésének.

A térbeli rajzok készítésének elve

A térbeli rajzok készítésének elve tulajdonképpen igen egyszerű. Az ábrázolandó tárgyat párhuzamos síkok alkalmasan megválasztott sorozatával gondolatban elmetsszük, és az egyes síkokba eső metszeteket üveglapokra (esetleg más anyagú átlátszó lapokra) rajzoljuk, majd az egyes lapokat a valóságnak megfelelő sorrendben egymásra helyezzük. Az egymásra helyezett metszetekből aztán „felépül" az ábrázolandó alakzat térbeli rajza. Az üveglapokból összeállított üvegtömbben a kép úgy jelenik meg, mint a borostyánba záródott bogarak. Ez a lerajzolt térbeli kép a valóságos tárgyhoz hasonlóan több (rendszerint két) oldalról is megnézhető (esetleg több oldalról is megtekinthetővé válik, ha az üveglapok széleit lecsiszoljuk; nekem ezt sajnos még nem sikerült megvalósítanom), kézbe vehető, tehát bizonyos mértékig valóságos „tárgyként" kezelhető. Ugyanakkor a síkbeli rajzok készítésének sok előnye e térbeli ábrák esetében is alkalmazható: nevezetesen több színt is használhatunk az ábrák egy-egy részletének hangsúlyozására; mód van egyes részletek árnyékolással történő kiemelésére; és lehetőség nyílik a térbeli ábrák betűzésére is. Ez utóbbi nagymértékben megkönnyíti az ábrára történő hivatkozást és a térbeli viszonyok megértését, illetve elmagyarázását.

Amennyiben a rétegeket összeragasztjuk vagy összefogjuk, úgy statikus ábrákat kapunk (legtöbbször ilyenekre van szükség), készíthetünk azonban deformálható ábrákat is, ha pl. módot adunk az egyes rétegek egymáshoz képest történő elcsúsztatására. Például a rétegek elcsúsztatásával egy egyenes hasáb rajzát ferde hasáb rajzává deformálhatjuk. Ez egyrészt szemléletes, másrészt erősíti azt az illúziót, hogy a rajz a valóságos tárgynak megfelelően kezelhető (az említett példában a rajz deformálása könnyebb és szemléletesebb, mint a valóságos tárgy deformálása).

Szükséges eszközök

A térbeli rajzok készítése megoldható az írásvetítő fóliára történő rajzolás rajzeszközeivel, ezek a rajzeszközök pedig a legtöbb iskolában már rendelkezésre állanak. Nagyon jól lehet például üvegre is rajzolni a gyorsan száradó, négyszínű „Faber-castell"-készlettel vagy a „Projector pen"-készlettel. A rajzok elkészítéséhez szükséges egyéb eszközök (körzők, vonalzók, különböző mérőeszközök) általában szintén rendelkezésre állanak.

Az egyes metszetek megrajzolására alkalmasnak bizonyultak a *vékony mikroszkóp-tárgylemezek*. Ezek is viszonylag olcsón és nagy mennyiségben szerezhetők be.

A rajzok elkészítésének módja

A térbeli rajzok elkészítése több türelmet és nagyobb pontosságot igényel, mint átlagos kívánalmaknak megfelelő síkbeli szemléltető ábrák előállítása. Elég csak arra gondolnunk, hogy minden síkmetszetet külön meg kell rajzolnunk, vagy arra, hogy a tapasztalatok szerint az egyes rétegek megrajzolásakor elkövetett kisebb pontatlanságok a térbeli rajzon már elég zavaró hibát adhatnak. (Remélem, hogy mindezek közlésével nem riasztok el senkit térbeli rajzok készítésétől.)

Az alábbiakban néhány olyan apróbb fogást szeretnék elmondani, amelyek önmagukban jelentéktelennek látszanak, de igen megkönnyítik a munkát, segítik a pontos rajzolást. Saját kísérletei alapján aztán mindenki tovább gyarapíthatja e fogások „gyűjteményét".

Célszerű a rajzok elkészítése előtt előre megszámozni a lemezkéket. Sok térbeli tárgy esetében az egyes metszetek olyan kevés rajzot tartalmaznak, hogy csupán e metszetrajzok alapján nehéz felismerni a lemezkék sorrendjét. A lemezek számozásával elkerülhető a nagyobb kavarodás. A lemezek alsó vagy felső sarkába írt apró számok a kép összeállításakor letörölhetők, de meglétük sem zavaró.

Az egyes rétegekre kerülő képeket (metszeteket) jó papíron előre megtervezni, legalább vázlatosan megrajzolni; az egyes metszeteket azután ezt az előre elkészített „forgatókönyvet" követve vagy pontosan másolva lehet megfelelően elkészíteni.

Említettem, hogy a metszeteken mutatkozó apróbb pontatlanságok a rétegek összerakásakor láthatóvá válhatnak. Ez nagyrészt kiküszöbölhető azáltal, ha a rétegeket egymásra rakva (a készülő rétegrajzokat ily módon pontosan egymáshoz illesztve) fokozatosan „építjük" fel rajzban a kívánt testet. Ezt az eljárást nehezíti az, hogy az egymásra helyezett üveglapok könnyen elcsúsznak, elmozdulnak. A lapok elmozdulása megszüntethető, ha alsó és felső szélüket vékony ragasztóréteggel vonjuk be. Olyan ragasztót célszerű alkalmazni, amely nem köt túlságosan, ezáltal lehetővé válik a rétegek ismételt megbontása korrekció vagy több részletben történő rajzolás esetén. A rétegek ilyen módon történő összeragasztására igen alkalmasnak mondható a „Barkács" vizes diszperziós ragasztó. Ennek még az az előnye is megvan, hogy a ragasztó anyaga megkötés után áttetszővé válik, és a ragasztás ezért szinte láthatatlan lesz.

Az egymásra kerülő rétegek véges vastagsága miatt nem tudunk folytonos vonalakat rajzolni. Minél vékonyabbak az egymásra kerülő rétegek, annál jobban keltheti rajzunk a folytonosság illúzióját. Sok esetben azonban a rajzon szereplő vonalak folytonosságának érzete a metszeteken történő bizonyos mértékű „csalással" is fokozható. Ha például a rétegek síkjait ferdén átdöfő (ezekre a síkokra nem merőleges és velük nem párhuzamos) egyenest ábrázolunk, akkor az egyes rétegekre szigorúan véve csupán pontokat rajzolhatunk, hiszen a szóban forgó egyenesnek síkjainkkal alkotott metszetei pontok. Ha viszont ehhez a „pontos" ábrázoláshoz ragaszkodunk, akkor térbeli ábránkon nem egyenest, hanem csupán egy egyenesre illeszkedő pontsort kapunk (síkbeli rajzon ez szaggatott vonalnak felel meg). Egy kis csalással azonban a folytonosság illúzióját kelthetjük: az egyes metszeteken szereplő pontok helyett az ábrázolandó egyenes síkunkra eső merőleges vetületének irányába mutató pici szakaszokat rajzolunk. Ekkor a térbeli rajzot például elölnézetből szemlélő számára az egyenest kirajzoló „diszkrét pontok" folytonos vonallá mosódnak össze, hiszen a rétegeken szereplő szakaszok elölnézetből szemlélve egymásba nyúlnak.

A térbeli rajzok rétegekből történő kialakításának többféle módja is megvalósítható. Ha statikus rajzokat akarunk készíteni, akkor legcélszerűbb az egyes rétegeket a fent említett módon összeragasztani. A rétegekből ragasztással kialakított üvegtömb minden különösebb elővigyázatosság nélkül tárolható. Ha viszont deformálható ábrákat akarunk készíteni, akkor nem élhetünk a lemezkék összeragasztásával. Ilyenkor legcélszerűbb a rétegeket valamilyen gumigyűrűvel alsó és felső szélüknél szorosan összefogni. Ezzel a módszerrel bármikor megbontható, könnyen tárolható, deformálható üvegtömbök alakíthatók ki.

Néhány megjegyzés

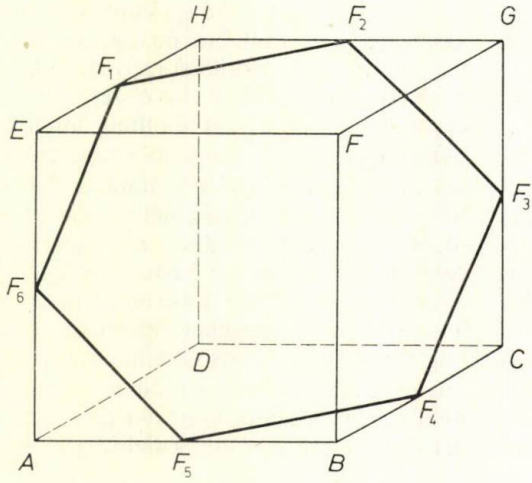
A térbeli rajzok elkészítésének elve bármilyen idom ábrázolására alkalmazható, megjegyezzük azonban, hogy síklapokkal határolt testek, egyenes vonalak (szakaszok) ábrázolása lényegesen kevesebb türelmet és munkát kíván, mint görbült felületek által határolt testek, görbe vonalak ábrázolása. Ezek megrajzolása nehéz feladat.

Az ábrák valósághűsége, a vonalak folytonosságának illúziója fokozható azáltal, hogy vékonyabb lemezekre rajzolunk, vagyis több rétegből építjük föl az ábrát. Érdemes a mikroszkóp-tárgylemezeknél is vékonyabb üveg- (vagy műanyag) lapokkal kísérletezni. (Ezeknél vékonyabb üveglemezekhez én sajnos nem tudtam hozzájutni, írópapír vastagságú átlátszó „lemezek" alkalmazása

pedig — a sok metszetrajz elkészítése miatt — nagyon megnövelné a munkát.)

Üveglapok alkalmazása — kellő elővigyázatosság nélkül — balesetveszélyes lehet. Ezt érdemes szem előtt tartanunk. Csökkenti az üveglapok törésének lehetőségét (és így a balesetveszélyt is), ha a lapokat üvegtömbbé ragasztjuk össze. A gyerekek kezébe már csupán ezeket az elkészített tömböket (ábrákat) adjuk! Csökkenthető a balesetveszély azzal is, ha nem üveg-, hanem valamilyen nagy átlátszóságú (például plexi-) lapocskákat alkalmazunk. Legfontosabb azonban az elővigyázatosság, hiszen ugyanezekkel az üveglapokkal dolgoznak a biológiai (orvosi) laboratóriumokban is, és ott szakszerű kezelés mellett nem okoznak különösebb balesetet.

Végezetül érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy az újítási javaslat elbírálói szerint ez az ábrázolási mód esetleg nemcsak geometriai szemléltető ábrák készítésére megfelelő, hanem haszonnal alkalmazható más tantárgyak (például gépszerkezettan) egyes szemléltető ábráinak elkészítésére is.



1. ábra. Az ábrázolandó hatszögmetszet

Egy konkrét térbeli ábra metszetrajzainak ismertetése

Az alábbiakban egy konkrét példán szeretném bemutatni a térbeli ábrák elkészítésének folyamatát. Mint ismeretes, a kockát bizonyos élközéppontjain áthaladó síkok szabályos hatszögben metszik. Az alábbi rajzokon egy kocka ilyen szabályos hatszögmetszetének rétegrajzait láthatjuk. Ezek üveglapra történő átmásolása és az üveglapok megfelelő egymásra helyezése után kialakul a kocka hatszögmetszetének térbeli rajza. (1. és 2. ábra.)

FELADATOK

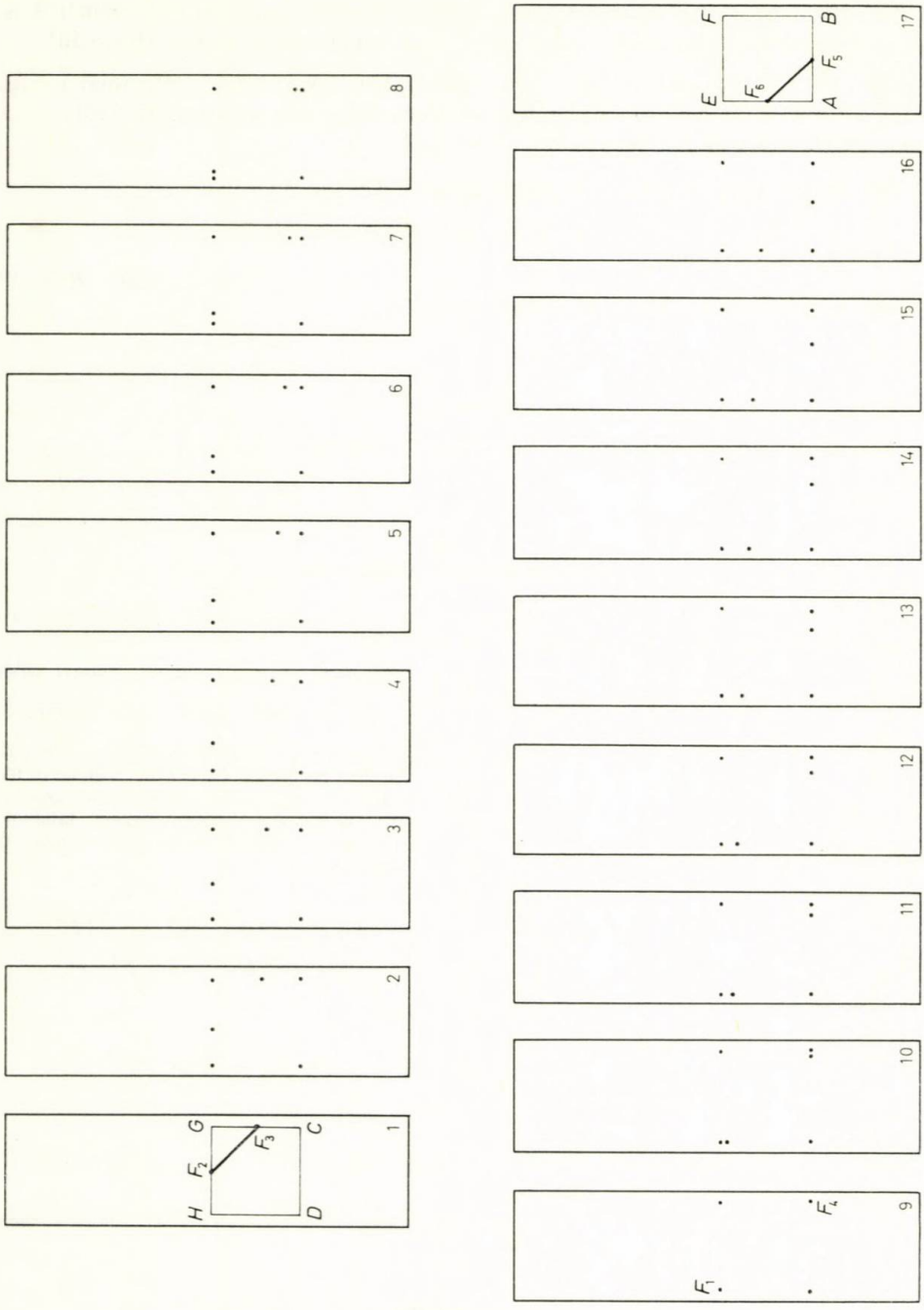
Rovatvezető: POGÁTS FERENC

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

975. Hány olyan természetes szám van, amely a 3^n-nél nem nagyobb, különböző (nemnegatív) egész kitevőjű háromhatványok összege?

976. Ha egy négyzetszám páratlan jegyre végződik, akkor milyen számjegyek állhatnak a tízesek, illetve a százasok helyén?



2. ábra. A rétegrajzok

977. Bizonyítsuk be, ha egy konvex poliéder minden lapja centrálszimmetrikus, akkor a poliédernek legalább nyolc olyan csúcsa van, amely pontosan háromélű!

978. Az ABC és ADE közös A csúcsú szabályos háromszögek. Bizonyítsuk be, hogy a CDX és az EBY szabályos háromszögek súlypontja azonos, ha X, illetve Y pont a CD, illetve az EB megfelelő partján van!

979. Oldjuk meg az alábbi négyismeretlenes egyenletrendszert:

$$xy+z=-1, \quad yz+u=-3, \quad zu+x=1, \quad ux+y=2.$$

Surányi János, Budapest

980. Legyen α valós szám. Igazoljuk, hogy az

$$a_1=\alpha,$$

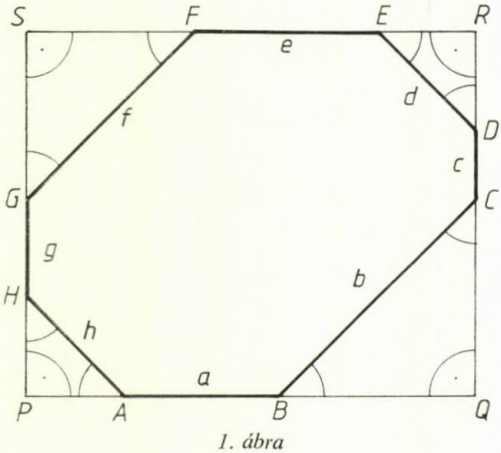
$$a_n=\cos a_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

sorozat konvergens és határértéke független az α megválasztásától!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

Feladatmegoldások (951—956.)

951. Egy konvex nyolcszög minden szöge egyenlő. Bizonyítsuk be, ha a sokszög minden oldala racionális hosszúságú, akkor a szemköztes oldalak egyenlők!



1. ábra

Megoldás: A nyolcszög valamennyi szöge $\frac{3\pi}{4}$, így egy oldalegyenes a másodszomszéd oldalegyenesekre merőleges, tehát az AB, CD, EF és GH egyenesek egy $PQRS$ téglalapot határolnak (1. ábra). E téglalap sarkainál egyenlő szárú, derékszögű háromszögeket találunk. Ennélfogva, a téglalap szemköztes oldalainak egyenlőségéből:

$$PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}h+a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{\sqrt{2}}{2}d+e+\frac{\sqrt{2}}{2}f=RS,$$

azaz

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(h+b-d-f)=e-a.$$

Ez utóbbi egyenlőség jobb oldalán racionális szám áll, így a bal oldal — ami a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ racionális többszöröse — is racionális kell legyen. A $\frac{\sqrt{2}}{2}$ racionális többszörösei közül egyedül a nulla racionális, tehát

$$e=a.$$

Mivel a nyolcszög szemköztes oldalainak nincs kitüntetett szerepe, ezért $b=f$, $c=g$ és $d=h$.

Csörsz Sándor, Dunakeszi; Nyirő László, Mezőkövesd; Porubszkyné Burda Magdolna, Budapest

A megoldók száma: 22.

952. Két számrendszer alapszámainak összege 10. Az egyikben az $ABAB$ alakú számok mindig oszthatók tízzel. Melyek ezek a számrendszerek?

Orbán Gábor, Makó

Megoldás: Legyen $2 \leqq x \leqq 8$, A és B x-nél kisebb nem negatív egész szám. Az

$$ABAB = Ax^3+Bx^2+Ax+B = (Ax+B)(x^2+1)$$

előállításból, az $A=0$, $B=1$ lehetséges választás miatt, $ABAB$ akkor és csak akkor osztható tízzel, ha x^2+1 osztható tízzel, vagyis ha x^2 a kilences számjegyre végződik, ha tehát $x=3$ vagy $x=7$.

Mivel x^2+1 akkor és csak akkor osztható tízzel, ha $(10-x)^2+1$ is, ezért mindkét számrendszer egyszerre tesz eleget az $ABAB$ alakú számokra kirótt feltételeknek.

Mindazoknak a számrendszernek g alapszáma, amelyekben az $ABAB$ számok tíz többszörösei, $g=10n-3$ és $g=10n-7$, ahol n tetszőleges pozitív egész.

Peleskey Miklós Pál, Budapest;
Sugár György, Budapest

A megoldók száma: 35.

953. Igazoljuk, hogy:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2+k}\right]^2 \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)(3n+1).$$

Kun Péter, Szentendre

I. megoldás: Felhasználva, hogy $k \leqq k^2$ és $1 \leqq n^2$ minden pozitív k, illetve n-re, és egyenlőség is csak akkor, ha $k=n=1$,

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2+k}\right]^2 \leqq \left[\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2k^2}\right]^2 = \left[\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} k\right]^2 = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2 (2n^2+4n+2) \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^2 (3n^2+4n+1) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)(3n+1).$$

Ezzel az állítást igazoltuk, s azt is beláttuk, hogy az egyenlőség csak az $n=1$ esetben áll fenn.

Máté Bálint, Pécs
Náfrádi Ferenc, Győr

II. megoldás: Mivel

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2+k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)^2 < \left[\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+2)^2,$$

továbbá $n \geqq 2$-re könnyen láthatóan

$$(n+2)^2 < (n+1)(3n+1),$$

ezért a feladatbeli állítás igaz.

Matolcsy Kálmán, Debrecen;
Zsidó György, Kolozsvár

1. megjegyzés: Ugyanezt az $\left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+2)^2$ felsőkorlátot nyerjük, ha a számtani és a mértani közép közötti összefüggést alkalmazzuk, majd összegzés után négyzetre emelünk:

$$\sqrt{k^2+k} = \sqrt{k(k+1)} \leqq \frac{k+k+1}{2} = k+\frac{1}{2}.$$

Gőgh József, Gúta;
Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza

2. megjegyzés: További, az eredetileg adott felső korlátnál jobb felső korlátot kaphatunk a négyzetes és a számtani közepek közötti összefüggést felhasználva:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}}{n} \leqq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k^2+k})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n}} = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{3}}.$$

Ebből viszont

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2 \leqq \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2}$$

adódik.

Matolcsy Kálmán, Debrecen; Nagy Ferenc, Hajdúnánás és Tuzson Zoltán, Brassó

3. megjegyzés: Nem nehéz belátni, hogy $n \geqq 2$-re

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+2)^2 \leqq \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3} \leqq 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)(3n+1),$$

vagyis az eddigi felső korlátok közül a *II. megoldásban* kapott a legkisebb. Belátjuk, hogy erre a korlátra és a $\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2$-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+2)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2} = 1,$$

azaz *„aszimptotikusan"* egyenlőek.

A *II. megoldásból* következően $1 \leqq \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+2)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2}$, elég tehát azt belátni, hogy a fenti határérték legfeljebb egy.

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+2)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{n(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2} + 1 \right),$$

ezért a jobb oldal első tagjának számlálóját átalakítva, majd növelve:

$$\left(\frac{n(n+2)}{2} - \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)\left(\frac{n(n+2)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right) <$$

$$< \left(\frac{n(n+2)}{2} - \sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\frac{n(n+2)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(k+1)\right) =$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{n(n+2)}{2} + \frac{n(n+3)}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (2n+5),$$

a nevezőjét pedig csökkentve:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2 > \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+1)^2$$

nyerjük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 (n+2)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}\right)^2} \leqq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{(n+1)^2}+1\right) = 1.$$

Matolcsy Kálmán, Debrecen

A megoldók száma: 32.

954. Hány, topológiailag különböző, ötlapú, illetve hatlapú konvex poliéder van?

Varga Tamás, Budapest

Megoldás:

Jelöljük a konvex poliéder lapjainak számát szokásosan l-lel, az élek számát e-vel, és a csúcsokét c-vel!

Egy poliédernek legalább négy csúcsa van, de négycsúcsú poliéder egyedül a tetraéder, tehát

$$l \geqq 5 \quad \text{esetén} \quad c \geqq 5. \tag{1}$$

Minden egyszerű poliéderre, tehát a konvex poliéderekre is érvényes Euler tétele, mely szerint

$$e+2 = l+c. \tag{2}$$

Mivel a konvex poliéder minden csúcsához legalább 3 él tartozik és minden élhez pontosan 2 csúcs, fennáll, hogy

$$3c \geqq 2e. \tag{3}$$

A (2)-ből e-t kifejezve és (3)-ba beírva, átrendezés után kapjuk a poliéderünkre érvényes

$$e \geqq 3l-6 \tag{4}$$

egyenlőtlenséget.

A továbbiakban a rövidség kedvéért konvex poliéder helyett csak poliédert mondunk.

Legyen l_n a poliéder azon lapjainak száma, amelyek n oldalú sokszögek ($n \geqq 3$). Ekkor $\sum_n n \cdot l_n$ az összes élek számának kétszeresét adja (egy él pontosan két laphoz tartozik). Itt az összegezés minden olyan n-re kiterjed, amilyen oldalszámú lapja a poliédernek egyáltalán van. Ha megállapodunk abban, hogy legyen $l_k=0$, ha k oldalú lapja a poliédernek *nincs*, akkor mondhatjuk, hogy az összegezés a $3 \leqq n$ egészekre vonatkozik. Felső korlátot adhat n-re az összegezésben az a meggondolás, hogy a poliéder egy n oldalú lapjának minden oldalához pontosan *egy* újabb lap csatlakozik, ha tehát n_{max} jelöli annak a lapnak az oldalszámát, amelynél több oldalú lapja a poliédernek nincs, akkor $n_{max} < l$, pontosabban minden poliéder legalább $n_{max}+1$ lapú, azaz fennáll, hogy $n_{max} \leqq l-1$, vagyis $3 \leqq n \leqq l-1$.

Tehát

$$\sum_{n=3}^{l-1} n \cdot l_n = 2e, \tag{5}$$

és természetesen

$$\sum_{n=3}^{l-1} l_n = l. \tag{6}$$

Térjünk most rá az *ötlapú* (konvex) poliéderek vizsgálatára! Legyen tehát $l=5$, így (2) alapján $e=c+3$, és tekintettel (1) és (4)-re $8 \leqq e \leqq 9$.

Tehát ötlapú konvex poliédernek *8 vagy 9 éle* lehet.

Írjuk ki részletesen az $l=5$ esetre az (5) és (6) egyenleteket!

$$3l_3+4l_4 = 2e,$$

$$l_3+l_4 = 5.$$

A második egyenlet háromszorosát az elsőből levonva azt kapjuk, hogy

$$l_4 = 2e-15,$$

és így

$$l_3 = 20-2e.$$

Felhasználva az élszámra tett megállapításunkat a topológiailag megkülönböztethető ötlapú konvex poliéderek lehetséges adatait az alábbi táblázat adja:

Sorszám	l	c	e	l_3	l_4
1.	5	5	8	4	1
2.	5	6	9	2	3

1. A négy háromszöglapból és egy négyszöglapból álló poliéderek osztálya létezik: ide tartozik minden *négyoldalú gúla* (és más poliéder nem).
2. A két háromszöglapból és 3 négyszöglapból álló poliéderek osztálya szintén nem üres: reprezentánsnak választhatjuk például a *háromoldalú hasábokat*. (Vegyük észre, hogy a 3 négyszög nem helyezkedhet el úgy, hogy mindháromnak közös csúcsa legyen.)

Eredményünk: csak *két* topológiailag megkülönböztethető ötlapú konvex poliéder létezik.

Vizsgáljuk meg a *hatlapú* konvex poliéderek osztályba sorolását. Legyen most $l=6$, ezért (2) szerint $e=c+4$, és (1) valamint (4) miatt $9 \leqq e \leqq 12$.

Vagyis a hatlapú konvex poliédernek *9, 10, 11 vagy 12 éle* lehet. Alkalmazzuk az (5) és a (6) egyenleteket az $l=6$ esetre:

$$3l_3+4l_4+5l_5 = 2e,$$

$$l_3+ l_4+ l_5 = 6.$$

A második egyenlet háromszorosát az elsőből levonva kifejezhetjük l_4-et, majd a második egyenletet ismételten felhasználva l_3-at is az l_5 és e mint paraméterek segítségével. Eredményeink:

$$l_4 = 2e-2l_5-18,$$

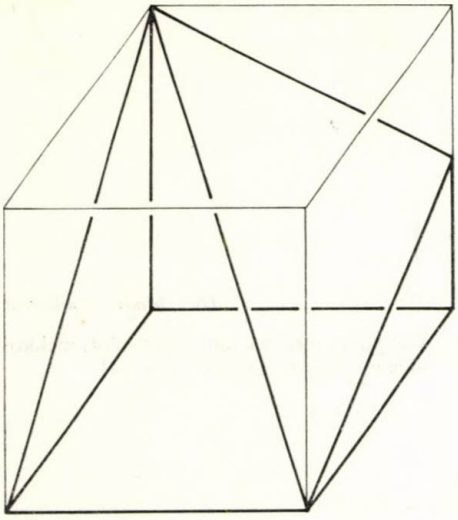
$$l_3 = -2e+ l_5+24,$$

ahol mint már láttuk $9 \leqq e \leqq 12$, továbbá $0 \leqq l_5 < 3$, mert 3 vagy több ötszöglapot tartalmazó poliédernek legalább 9 csúcsa van, viszont $e \leqq 12$ folytán $c=e-4 \leqq 8$.

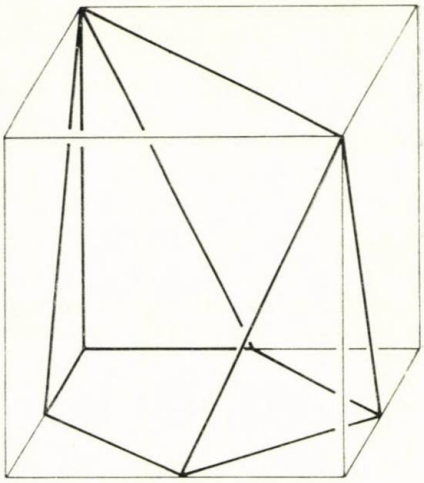
Az e és az l_5 paraméterek ezen értékeit felhasználva, a számítások eredményeit az alábbi összeállítás tartalmazza:

Sorszám	l	c	e	l_5	l_4	l_3
1.	6	5	9	0	0	6
2.	6	6	10	1	0	5
3.	6	6	10	0	2	4
4.	6	7	11	2	0	4
5.	6	7	11	1	2	3
6.	6	7	11	0	4	2
7.	6	8	12	2	2	2
8.	6	8	12	1	4	1
9.	6	8	12	0	6	0

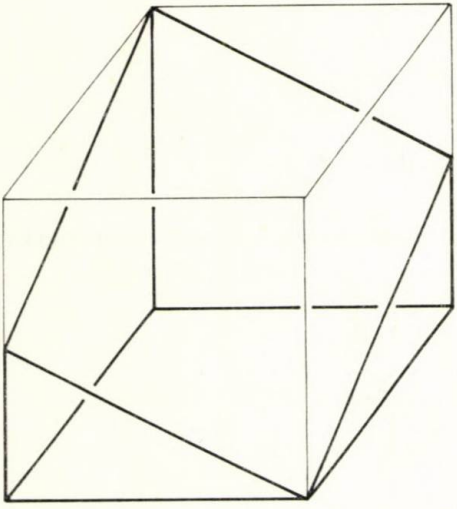
1. Hat háromszöglapból álló poliéderek osztályának egy reprezentánsát kapjuk, ha két egybevágó szabályos teraédert egyik lapjuknál fogva összeillesztünk úgy, hogy 3-3 csúcsuk egybeessék, de a negyedik nem.
2. Az egy ötszöglapból és öt háromszögből álló poliéderek az ötoldalú gúlák.
3. Két négyszöglapot tartalmazó hatcsúcsú poliéder négyszögei nem lehetnek közös él nélküliek, mert különben legalább hét csúcsuk lenne. A két szomszédos négyszöggel határolt poliéderek osztályának egy reprezentánsát a 2. ábra szemlélteti.
4. Két ötszöglapot tartalmazó hétcsúcsú poliéderek osztálya üres, ugyanis két ötszögnek legfeljebb 2 csúcsa lehet közös, így a poliédernek legalább 8 csúcsa lenne.
5. Egy ötszöglapot és két négyszöglapot tartalmazó hatlapú és hétcsúcsú poliéderen nyilván mindkét négyszög egy-egy élével az ötszög egy-egy oldalához csatlakozik. Ezek az ötszögoldalak azonban nem lehetnek szomszédosak, mert különben a poliédernek legalább 8 csúcsa lenne. A négyszögek tehát nem szomszédos ötszögoldalhoz csatlakoznak, és van közös élük, különben a poliédernek 8 csúcsa lenne. Az osztály egyik reprezentánsát a 3. ábra mutatja.
6. Két háromszöglapot tartalmazó poliéderen e két lap topológiailag különböző módon elhelyezkedhetne közös pont nélkül, közös éllel vagy csak egyetlen közös csúccsal. Az első két elhelyezkedés a csúcsok, illetve az élek számára vonatkozóan ellentmondáshoz vezet, az utóbbi megvalósítható. Az ekvivalenciaosztály egy reprezentánsa a 4. ábrán látható.
7. Két ötszöglappal, két négyszöggel és két háromszöggel határolt nyolccsúcsú poliéder akkor és csak akkor létezik, ha a két ötszög egyik oldala közös és a közös csúccsal nem rendelkező oldalak a két ötszögben páronként komplanárisak (5. ábra).



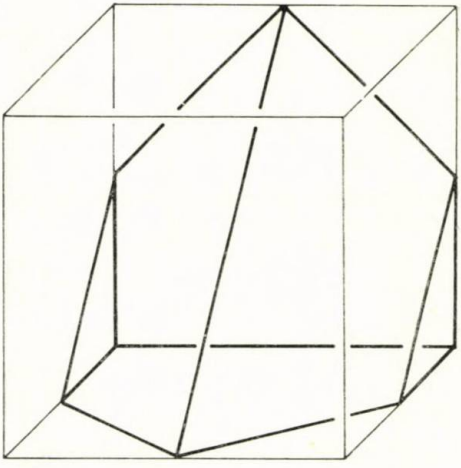
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

8. Miután az ötszög minden oldalához pontosan egy másik lap egy oldala csatlakozik, méghozzá négyhez négyszög, az ötödikhez háromszög, a négyszögek szabad éleinek lekötéséhez legalább egy újabb lap szükséges. Ez ellentmond annak, hogy a poliéder hatlapú. Ez az osztály tehát üres.
9. A hat négyszöglappal határolt poliéderek osztályának legkézenfekvőbb reprezentánsa a kocka.

Mindezt összevetve, tehát azt találtuk, hogy a hatlapú konvex poliéderek *hét* osztályba sorolhatók.

Sugár György, Budapest

Megjegyzés: Máig sem ismeretes, hogy hány topológiailag különböző l lapú konvex poliéder van, ha $l \geqq 10$. A hét-, nyolc-, illetve kilenclapú konvex poliéderek száma rendre 34, 257, 2606.

A megoldók száma: 5.

955. Az (x_n) és az (y_n) számsorozatokat az alábbi módon definiáljuk:

$$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{k}}$$

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} \quad \text{és} \quad y_n = \sqrt{-2+x_{n-1}}, \quad k \geqq 4.$$

Válasszuk meg a k értékét úgy, hogy adott n-re

$$x_n + y_n = 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

teljesüljön!

Tóth János, Érsekújvár

Megoldás: A definícióból nyilvánvaló, hogy $x_n > y_n$. Vizsgáljuk meg, ha van megfelelő k, mekkorának kell választsuk! Szorozzuk meg a megadott egyenlőség mindkét oldalát $(x_n - y_n)$-nel!

Ekkor

$$x_n^2 - y_n^2 = 2 + x_{n-1} - (-2 + x_{n-1}) = 4,$$

tehát a

$$4 = x_n^2 - y_n^2 = 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} (x_n - y_n)\text{-ből}$$

$$x_n - y_n = 2\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Adjuk ezt eredeti egyenlőségünkhöz! Egyszerűsítés után

$$x_n = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Mivel mindkét oldalon pozitív szám áll, így négyzetre emelés után ezzel ekvivalens egyenlőséget kapunk. Mivel $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$, ezért

$$2 + x_{n-1} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} + 2 + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Ebből

$$x_{n-1} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Előbbi eljárásunkat $(n-2)$-szer megismételve

$$x_1 = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

adódik. Újabb négyzetre emelés után

$$2 + \sqrt{k} = \frac{n}{2} + 2 + \frac{2}{n},$$

azaz

$$k = \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n}\right)^2$$

kell legyen.

Könnyen látható akár helyettesítéssel, akár megtett útunk visszafelé való megtételével, hogy a k ilyen választása megfelelő.

Csörsz Sándor, Dunakeszi

A megoldók száma: 21.

956. Legyen $A=(a_{ij})_{n\times n}$ olyan négyzetes mátrix, amelyben minden sor és minden oszlop elemeinek az összege a. Bizonyítsuk be, hogy az A^k mátrix bármely sorában vagy oszlopában álló elemek összege a^k, ha k pozitív egész!

Tuzson Zoltán, Brassó

Megoldás: Legyen a $B=(b_{ij})_{n\times n}$ mátrix olyan, amelyben minden sor és minden oszlop elemeinek összege b. Megvizsgáljuk az $A\cdot B$ i-edik sorában, illetve oszlopában álló elemek összegét.

A szorzatmátrix i-edik sorának j-edik eleme $\sum_{l=1}^{n} a_{il}\,b_{lj}$, tehát az i-edik sor elemeinek összegére

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right)=\sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{lj}\right)=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b=b\sum_{l=1}^{n} a_{il}=ba.$$

Ugyanúgy igazolhatjuk, hogy a szorzatmátrix j-edik oszlopában álló elemek összege ugyancsak ab.

Az előző tulajdonság alapján az $A^2=A\cdot A$ minden sora és minden oszlopa elemeinek összege a^2. Tegyük fel, hogy A^k minden sora és oszlopa elemeinek az összege a^k.

Az előbbiekből — teljes indukció elvénél fogva — következik, hogy az $A^k\cdot A=A^{k+1}$ szorzatmátrixban minden sorban és oszlopban az elemek összege a^{k+1}, bármely pozitív egész k-ra.

Megjegyzés: Ha H_n jelöli az összes olyan, valós számtest feletti n-edrendű négyzetes mátrix halmazát, amelyek bármely sorában és oszlopában az ott álló elemek összege egy, akkor az először bizonyított tulajdonság miatt H_n a mátrixszorzásra nézve egységelemes *félcsoport*. Ugyanis az említett tulajdonság szerint, ha $A\in H_n$ és $B\in H_n$, akkor $A\cdot B\in H_n$. A szorzás asszociativitása továbbá az n-edrendű egységmátrix H_n-beli volta nyilvánvaló. H_n nem csoport, hiszen például

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\in H_2,$$

de A-nak nincs inverze.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

A megoldók száma: 20.

A megoldók névsora (951—956.)

Bagi Gábor, Barcs (952.); Bartha Gábor, Szentendre (951., 952., 953. 2 mód, 954—956.); Bencze Mihály, Brassó (952., 953., 955., 956.); Bege Antal, Csíkszereda (951—953., 955., 956); Bogdán Zoltán, Cegléd (951., 952., 953. két mód, 954—956.); Boros András, Nagybánya (953.); Csősz Sándor, Dunakeszi (951—952., 953. két mód, 955., 956.); Gerecsei Zsuzsanna, Eger (952.); Gőgh József, Güta (952., 953., 955., 956.); Hencz Tihamér, Güta (952.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (951—953., 955.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (951—953., 955., 956.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (951—953., 955., 956.); Kamarás Lajos, Pécs (951—956.); Kovácsné Gajdács Ibolya (951—953.); Kozmáné Tegez Rita (952., 953., 956.); Kun Péter, Szentendre (952., 956.); Dr. Major Pál, Budapest (951—953.); Matolcsy Kálmán, Debrecen (951., 952., 953. három mód, 955., 956.); Máté Bálint, Pécs (951—953.); Méri Béla, Budapest (952., 953.); Mészáros József, Galánta (952., 953., 955.); Molnár József, Szombathely (952., 953.); Náfrádi Ferenc, Győr (951—953., 956.); Nagy Ferenc, Hajdúnánás (953.); Nyírő László, Mezőkövesd (951—953., 955., 956.); Peleskey Miklós Pál, Budaörs (952., 953., 955., 956.); Porubszkyné Burda Magdolna, Budapest (951—953., 955., 956.); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (952.); Schutzbach Mártonné, Siófok (952.); Sugár György, Budapest (951—954., 955. két mód, 956.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (951—953., 955.); Szánthó Gyula, Gyula (951—956.); Tuzson Zoltán, Brassó (951., 952., 953. négy mód, 955.); Vermes Miklós, Budapest (951., 953. két mód); Zalán Péterné, Budapest (951—953.); Zsidó György, Kolozsvár (951—953., 955., 956.).

5,50 Ft

KÖNYVISMERTETÉS

Bognárné—Nemetz—Tusnády: Ismerkedés a véletlennel

„Mindketten dobtak egy szabályos kockával. Aki nagyobbat dob, az nyer, de az *A* játékos akkor is nyer, ha egyformát dobnak, *B* játékos viszont mindig újra dobhat, valahányszor egyest dobott."

Az ismertetett játék a fenti könyvből való, melyet a közelmúltban jelentetett meg a Tankönyvkiadó. Hasonló és természetesen összetettebb játékok is szerepelnek a bőséges választékban, melyet a szerzők a véletlen jelenségek vizsgálatához modellként felsorakoztattak.

A könyvet olvasva eszembe jutnak József Attila sorai: „Játszani is engedd szép, okos fiadat!". Különösen hasznos a játék a megadott formában, ahogyan a szakköri füzet előírja: Jegyezzük az eredményeket, válaszoljunk a feltett kérdésekre a játék megkezdése előtt és után! A kérdések a matematikai tartalom felé irányítják gondolatainkat. „*A* vagy *B* szerepét választjuk szívesebben?" „A meggondolás vagy a kísérlet ad jobb lehetőséget a kérdések megválaszolására?" „Igazságos-e a játék a megadott formában?" — Akik valóban játszanak, azoknak saját problémáik fogalmazódnak meg a feltett kérdésekben.

A fokozatosan nehezedő téma és a megfelelő feladatok útvesztőiben nem marad magára az olvasó, nem tévedhet el, mert segítőtársakról is gondoskodnak a szerzők. A válaszok megadása után érdekes tanulói véleményekkel, összegező tanári magyarázatokkal szembesíthetjük elgondolásainkat. A *Válaszok* című rész olvasása közben tanár és tanulók beszélgetésének lehetünk tanui, sőt részesei, velük együtt játszhatunk, és közben kitárul előttünk tapasztalataink és meggondolásaink alapján a véletlen jelenségek világa, megismerkedhetünk a valószínűségszámítás egész sor fogalmával, ezek matematikai tartalmával, tételekkel és alkalmazási területeikkel.

A könyv önálló tanulmányozása elsősorban középiskolásoktól várható el, de az általános iskolások is képesek az első fejezetek feldolgozására — különösen szakköri foglalkozásokon. Tanári segédkönyvként is jól alkalmazható, a több kísérletben kipróbált játékgyűjtemény feldolgozása igen sok didaktikai ötletet tartalmaz. Jól hasznosíthatók a gyakorlatban elsősorban az osztálykeretre készített játékok és az ezekkel kapcsolatos feladatok, sőt a továbbiakat is felhasználhatjuk példatárunk kiegészítésére.

A feldolgozott anyag tartalmazza a gimnáziumi új tanterv fakultatív anyagának idevágó részeit, és bizonyos mértékig túl is lép ezen. Ennek ellenére kezdők is eredményesen tanulmányozhatják, mert a sokrétű megvilágítás és magyarázat lehetőséget nyújt a megértéshez, az elméleti összefoglalók a fogalmak pontos leírásával és a szereplő tételek precíz megfogalmazásával lehetővé teszik a megtanulást is. Túllép a könyv a tankönyv keretein annyival is, hogy itt a kötetlenebb feldolgozási mód és terjedelem lehetőségeivel, a szabadabb témaválasztással részletesebb, mélyebb és érdekesebb tárgyalás valósulhatott meg.

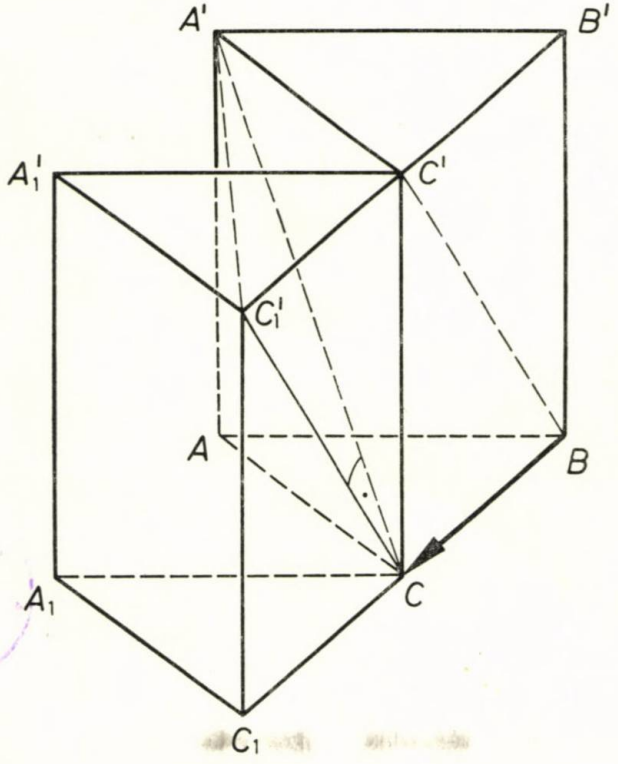
A fentiekkel kívánom az olvasó figyelmébe ajánlani az új szakköri füzetet, azzal a tudattal, hogy kellemes és hasznos olvasmányt ajánlhatok.

Kiss Zoltán
gimnáziumi tanár
Kaposvár

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1981. december * XXVIII. évfolyam 6 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200
81-4203 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 33,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 5,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Czeglédy István—Dr. Hajdu Sándor: A nevelés tervezése a matematikaoktatásban ... 161
Dr. Vajda István: Néhány javaslat a skaláris szorzatnak feladatmegoldásokban való felhasználására ... 166
Hódi Endre: Beszámoló a XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról ... 174
Pálmai Éva: Tízes számrendszerből kettesbe és kettes számrendszerből tízesbe átalakító eszköz ... 178
Kanász László: Tanulói körző kiegészítése írásvetítőn való használathoz ... 182
Rozgonyi Tibor—Dr. Varecza Árpád: Bizonyos rekurzív sorozatokról ... 183

FELADATOK ... 187

СОДЕРЖАНИЕ

Цегледы Иштван—Д-р Хайду Шандор: Планирование воспитания в обучении математике ... 161
Д-р Вайда Иштван: Некоторые предложения по применению скалярного произведения в решении задач ... 166
Ходы Эндре: Отчет о XXII-ой Международной Олимпиаде Школьников по математике ... 174
Палмаи Эва: Прибор для превращения чисел децимальной системы в бинарную и бинарной в децимальную ... 178
Канас Ласло: Усовершенствование ученического циркуля для употребления на кодоскопе ... 182
Розгони Тибор —Д-р Вареца Арпад: О некоторых рекурсивных последовательностях ... 183

ЗАДАЧИ ... 187

INHALT

Czeglédy, István—Dr. Hajdu, Sándor: Die Planung der Erziehung im Mathematikunterricht ... 161
Dr. Vajda, István: Einige Vorschläge zur Verwendung des Skalarproduktes bei Aufgabenlösungen ... 166
Hódi, Endre: Bericht über die XXII. Internationale Mathematik-Olympiade ... 174
Frl. Éva Pálmai: Ein Gerät zur Umwandlung vom Zehnersystem ins Duale und umgekehrt ... 178
Kanász, László: Ergänzung des Schülerzirkels zum Gebrauch auf dem Schreibprojektor ... 182
Rozgonyi, Tibor—Dr. Varecza, Árpád: Über gewiße rekursive Folgen ... 183

AUFGABEN ... 187

CZEGLÉDY ISTVÁN—DR. HAJDU SÁNDOR
főiskolai adjunktus főiskolai docens
Nyíregyháza

A nevelés tervezése a matematikaoktatásban

(A matematikatanulás irányításáról I.)

„A pedagógus a tanulók nevelésének folyamatában a legfontosabb tényező. Ez szükségessé teszi, hogy irányító tevékenysége tudatossá váljék."

(Az általános iskolai nevelés és oktatás terve I. kötet 20. lap.)

Mit vár a tudományos-technikai forradalom a mai iskolától?

— Az információrobbanás miatt áthidalhatatlannak látszó szakadék tátong a matematika mint tudomány, illetve a matematika mint tantárgy között, ezért a fejlődés elkerülhetetlen velejárója a tananyag bővítése. Ennek viszont együtt kell járnia bizonyos mértékű visszanyeséssel, hangsúlyváltozásokkal is.

— Az egyén csak úgy képes tevékenyen bekapcsolódni az állandóan változó társadalom életébe, ha minőségileg új személyiségtulajdonságokat fejlesztünk ki benne. Az ismeretszerzési folyamatnak az alkotóképességek kialakulását, fejlődését kell szolgálnia.

— A családok szabad idejének növekedése, az ötnapos tanításra való áttérés maga után vonja a tanulási idő csökkenését; a tanulók teherbírása határt szab a tanulási intenzitás fokozásának.

Végeredményben a társadalom azt várja a nevelőktől, hogy úgy javítsák az oktatás minőségét, hogy a tanuló kevesebb idő- és erőráfordítással több ismeretet szerezzen, magasabb képzettségi szintre jusson, a korábbinál értékesebb képességek fejlődjenek ki benne, röviden: fokozódjék az oktatás hatékonysága.

Azoknak a törekvéseknek, amelyek a fenti követelményeknek eleget kívánnak tenni, különböző akadályokat kell leküzdeniük. A teljesség igénye nélkül nézzünk ezek közül néhányat:

— Az új tartalom új szemléletet, módszereket, eszközöket követelt, így *az új matematikatanítás szétfeszítette a hagyományos didaktikai kereteket, ugyanakkor az új keretek még nem kellően kidolgozottak.* Szükségessé vált — a hagyományos didaktika eredményeinek megtartása, fejlesztése mellett — a neveléstudományok korszerű eredményeinek adaptálása, alkotó alkalmazása; az új matematikatanítás által felvetett speciális didaktikai problémák feltárása, megoldása.

— *Kidolgozatlanok a matematikatanítás új szellemének megfelelő eredménymérő módszerek és eszközök.*

— A permanenssé váló tantervváltozás, a neveléstudományok gyors fejlődése még a legképzettebb pedagógusoknak is nehézséget jelenthet.

Ezen akadályok elhárításához javasolunk olyan dokumentumokat, amelyek bekapcsolhatják a gyakorló pedagógust az új eredmények alkalmazásába, továbbfejlesztésébe. A mi véleményünk is az,

hogy kötelező érvényű segédanyagokat (például tanmeneteket) kiadni nem szabad, ezzel megsértenénk a tanár önállóságát, és azt a mítoszt keltenénk, hogy van általánosan alkalmazható, optimális pedagógiai eljárás. Viszont szükségesnek tűnik olyan tematikus tervek megszerkesztése, amelyek a tananyag lebontásán kívül tartalmazzák a tartalmi, tantárgy-pedagógiai, tantárgy-pszichológiai elemzést, nevelési, képzési, oktatási cél,- és feladatrendszert, a motivációs bázist, a részletes követelményrendszert. Az ilyen típusú segédanyag olyan cselekvési stratégiához segítené a tanárt, amelynek alapján a mainál sokkal felkészültebben, nagyobb döntési és választási lehetőséggel élve irányíthatná a konkrét pedagógiai folyamatot.

Tervezési stratégiánk elvi alapjai

Az ember társadalmi tevékenységének egyik legjellemzőbb sajátossága a céltudatosság: *A cél a működés kiváltója, alapmotívuma, alapja, végső értelme. A célnak olyan formában kell megjelennie, hogy a tervezés, az intézkedés és az értékelés alapja legyen.*

A hagyományos tervezés a tananyag felsorolásával rögzíti a tanulás céljait. Valóban, a tananyagban nemcsak a felhalmozott ismeretek jelennek meg, hanem azok az értelmi cselekvési formák, képességek is, amelyek a kérdéses ismereteket feltárták. Ha a tanuló adekvátan foglalkozik a tananyaggal, akkor benne is kialakulnak a szükséges pszichikus tulajdonságok. *Ezért a tananyag részletezése szükséges a célok meghatározásánál, de semmiképp sem elégséges.* Ez a koncepció lényegében a tananyag befogadójának tekinti a tanulót, és azt a hamis szemléletet tükrözi, hogy a környezeti hatás (amelyet most a tananyag közvetít) határozza meg a tudatot.

A behaviorista nézet szerint a célt a tanuló végső tevékenységében kell megfogalmaznunk, pontosan meghatározva, hogy mit, milyen körülmények között, milyen eredménnyel várunk. Hátrányai (a teljesség igénye nélkül):

Nem vizsgálja, hogy milyen személyiségtulajdonságokat takar az adott teljesítmény. Különböző tudati formák jelenhetnek meg hasonló teljesítményekben, egyazon tudati jelenség a legkülönbözőbb cselekvésekben mutatkozhat meg. A bonyolultabb személyiségtulajdonságok (pl. meggyőződés, világnézet stb.) mérése megoldatlan.

A visszacsatolás csak egyik mozzanata a tanulási folyamat irányításának.

Mi a pedagógiai folyamat célja? A társadalmi tevékenységhez szükséges és pszichológiailag lehetséges pszichikus folyamatok, állapotok, képződmények, tulajdonságok (pl. gondolkodási folyamat; fogalom mint pszichikus képződmény, jártasság, beállítódás, motiváltság; kreativitás, megfigyelőképesség stb.) *kialakítása, fejlesztése.*

Az így megfogalmazott célokat közvetlenül nem tudjuk vizsgálni, de a kialakulásukat, fejlődésüket elősegítő tényezőket meghatározhatjuk, tervezhetjük. A tudat nem úgy változik, hogy eltűri a környezeti hatásokat, „alkalmazkodik" hozzájuk, hanem úgy, hogy *a tanuló aktívan tevékenykedik, kölcsönhatásba lép környezetével. A tudatot nem a környezet, hanem a társadalmi lét határozza meg, esetünkben a tananyag aktív, adekvát feldolgozása.*

Gondolatmenetünket összefoglalva, a tanulási folyamat tervezésében, irányításában a következőket tartjuk fontosaknak:

— A kialakítandó pszichikus folyamatok, állapotok, tulajdonságok feltárását, vizsgálatát.

— A tananyag tartalmi, tantárgy-pedagógiai, tantárgy-pszichológiai elemzését.

— A tanulói közösségekben a tanári irányítással folyó tanulói tevékenység meghatározását. Ezt a tevékenységet egyaránt determinálja az elérendő cél (pl. a kreatív tulajdonságok fejlesztése), az egyes tanulók pillanatnyi fejlettségi szintje, illetve a tananyag tartalma.

— Részletes követelményrendszer megadását.

A négy terület szintetizálásával a nevelési, a képzési, az oktatási célok nem elszigetelten jelentkeznek, hanem egységes *cél-, feladat- és követelményrendszert* alkotnak. Amely rendszerhez szervesen csatlakozik:

— Kitekintés a megelőző, illetve következő célrendszerekre (analógiák, transzfer, belső koncentráció, alkalmazás stb.).

— Kezdőállapotok, végállapotok, a fejlődési folyamat lépcsőfokainak megállapítása.

— Tantárgyak közti koncentráció lehetőségei.

— Szociológiai háttér vizsgálata stb.

Nevelési célrendszer

Nevelési célon a társadalmi tevékenységhez, beilleszkedéshez alapvetően fontos, általános, komplex, állandósult tulajdonságok kialakítását, fejlesztését értjük. A nevelési célrendszer határozza meg a tananyag tartalmát, a tanítás módszereit, eszközeit.

Az állandósult pszichikus tulajdonságok kiépítése hosszú folyamat, ezért célszerű a nevelési célok rendszerét egész évre meghatározni, majd egy-egy témakörnél megtervezni a célok eléréséhez vezető utat. Hangsúlyozzuk, hogy az egyes *órák tervezését a teljes célrendszer irányítja.*

A nevelési célokat ÁGOSTON [1] után a nevelés tartalma (tudományos, világnézeti, erkölcsi, esztétikai nevelés), illetve a pszichikus tartományok (értelmi, érzelmi-akarati, pszichomotoros — kézügyességgel, beszédkészséggel kapcsolatos — tartományok) szerint két dimenzióban kategorizáljuk. Táblázatunkban konkrét példát adunk a nevelési célrendszer megfogalmazására. Nem soroljuk fel az összes célt, csupán elképzeléseink lényeges vonásait kívánjuk bemutatni.

Táblázatunkból látszik az egyes nevelési célok rendkívüli komplexitása, emiatt a kategorizálásunk esetenként „mesterkéltnek" tűnhet, illetve előfordul, hogy különböző célok ugyanazon pszichikus tulajdonságok más oldalról történő megközelítését szolgálják. Például, az N. 7. esztétikai nevelési célkitűzés, de szinte változtatás nélkül besorolható a tudományos nevelés területén a „logikus gondolkodásra nevelés" címszó alá is. Azt is megfigyelhetjük, hogy egyes célok a matematikatanítás egészére vonatkoznak (N. 1., N. 4., N. 5.), míg mások konkrét tartalomhoz (N. 2.), munkaformákhoz (N. 6.), módszerekhez (N. 3.), eszközökhöz, tanári személyiségvonásokhoz kötődnek.

A nevelési feladatok konkretizálása

A következő részben azt vizsgáljuk, hogy a nevelési célrendszer hogyan határozza meg a tananyag, a munkaformák, a módszer, az eszköz kiválasztását, illetve más oldalról, hogy az adott tartalmat, munkaformákat, módszereket, eszközöket hogyan használhatjuk fel a nevelési célok elérése érdekében. Vizsgáljuk először a tematikus tervezés szintjén!

Legyen a konkrét témakör az Adott tulajdonságú ponthalmazok síkban és térben című 5. osztályos „új" tantervi anyag, és tekintsünk kettőt a korábban említett célok közül. Teljességre még a kiragadott két példa esetében sem törekedhetünk.

N. 1. *Kreatív személyiségtulajdonságok fejlesztésének megvalósítása:* A tanulók önállóan „fedezik fel" a kérdéses mértani helyeket; párhuzamos egyenespár, illetve szakaszfelező merőleges szerkesztését; a tárgyi manipulációból kiinduló geometriai tevékenység stratégiáját; a több mértani hely egyidejű figyelembevételének lehetőségeit. Olyan feladatokat is kitűzünk, amelyben a bizonytalansági tényezőket már az adatok, a feltételek is tartalmazzák, illetve amelyekben a célt nem fogalmazzuk meg egyértelműen: feltételek variálása, hiányzó adatok felkutatása, a cél megfogalmazása a probléma. Megoldások diszkussziója, különböző megoldási módok elvárása, az eredeti ötletek kiemelt jutalmazása.

N. 5. *Békére nevelés megvalósítása:* Nukleáris fegyverek pusztító hatásának ábrázolása térképen. NATO-fegyverek hatókörének ábrázolása, beszélgetés.

		Értelmi tartomány	Érzelmi-akarati tartomány
Tudományos nevelés	N. 1.	*Kreatív személyiségtulajdonságok fejlesztése:* problémaérzékenység, rugalmasság, ötletgazdagság, eredetiség, a teljesség igénye, újrafogalmazás képessége.	Spontán nyitottság, kíváncsiság, igény az újszerű megoldások keresésére, a problémák sokoldalú vizsgálatára. Függetlenségre, önállóságra törekvés. A teljesség pozitív értékelése.
	N. 2.	*Térszemlélet fejlesztése*	—
	N. 3.	*Vitakészség fejlesztése:* Alkalmazkodó rugalmasság, újrafogalmazás képessége. A gondolatmenet logikai rendezésének képessége. ...	A vitába való bekapcsolódás igénye. Hajlandóság saját nézeteinek kifejtésére, mások érveinek értékelésére, elfogadására.
Világnézeti nevelés	N. 4.	Élményalap biztosítása annak az ismeretnek a kialakulásához, hogy a *matematikai gondolkodás forrása az ember kollektív gyakorlati tevékenysége.*	Élményalap az előző ismeret meggyőződéssé válásához.
	N. 5.	*Békére nevelés:* ismeretek a béke építő, a háború pusztító hatásáról. ...	A béke szeretete, a háború gyűlölete (személyes állásfoglalás, elkötelezettség, meggyőződés).
Erkölcsi nevelés	N. 6.	*Kollektivizmusra nevelés:* Értelmi együttműködési képesség; saját gondolatmenettől eltérő elképzelések figyelembevételének, értékelésének, alkalmazásának a képessége. ...	A közösségbe illeszkedés igénye. Közösségi szellem, segítőkészség kialakítása, fejlesztése.
Esztétikai nevelés	N. 7.	*A gondolatmenet egyszerűsítése* képességének kialakítása; jártasság a logikailag ekvivalens formák felismerésében, megfogalmazásában.	A célratörő, egyszerű gondolatmenet igényének kialakítása, fejlesztése. A feleslegesen bonyolult, zavaros gondolatmenetek elutasítása.
	N. 8.	*A gondolatok helyes nyelvi formába öntésének* képessége. ...	A matematikai kifejezések pontos használatának igénye és pozitív értékelése, a pontatlanság, „pongyolaság" elutasítása.

Pszichomotoros tartomány	Megvalósítás
Tárgyi konstrukciós képesség. Beszédkészség.	Tárgyi tevékenységből kiinduló „felfedeztető" tanulás, feladatrendszerek. Adatok, feltételek, célok variálása, az összes lehetséges megoldás feltárása. Az aktuális tananyagtól „idegen" megoldások keresése. „Ötletbörze"; az ötletek késleltetett megítélése, a dicséret dominál. A tévedés szabadságának elve érvényesül.
Tárgyi manipulációs képesség.	Tárgyi modellek készítése, alkalmazása.
Beszédkészség fejlesztése.	Csoportmunkában, frontális osztálymunkában a „parlamentális" vita megvalósítása.
Tárgyi manipulációs képesség.	Tárgyi tevékenység, manipuláció, majd ebből elvonatkoztatott matematikai tevékenység. A lakóhely konkrét gazdasági egységei eredményeinek gyűjtése, feldolgozása (őrsi, illetve osztálykeretben) ezen keresztül a gazdaság eredményeinek bemutatása. A gyakorlati alkalmazás lehetőségeinek megtanítása.
—	Feladatok alkalmas válogatása.
Beszédkészség; összehangolt, közösen végzett tárgyi tevékenység képességének kialakítása, fejlesztése.	Csoportmunka keretében összehangolt tevékenységet igénylő feladatok, feladatrendszerek; munkamegosztás; a különböző csoportok eredményeinek összegezése, értékelése frontális munkában. Frontálisan szervezett viták, megbeszélések.
—	Példaadás, követelés (nem elégszünk meg a megoldással, hanem felkutattatjuk az egyszerűsítési lehetőségeket), dicséret, jutalmazás. Bizonyítások, feladatmegoldások tervének, gondolatmenetének leiratása.
Beszédkészség.	A tanár személyes példamutatása. A pontatlanságok állandó javíttatása, javítása. A pontos fogalmazás jutalmazása (dicséret).

Végezetül érzékeltetjük, hogy a kitűzött nevelési célok hogyan determinálják az óra tervezését, illetve, hogy mi hogyan képzeljük el az általunk javasolt — központilag kidolgozott — tematikus tervek nevelési célrendszerének adaptálását az oktatásban.

Az N. 1., N. 3., N. 6. célt tekintve a tanár a homogén csoportmunka mellett dönt: A csoportmunka biztosítja a kollektív viszonyból származó speciális többletet. Az ötletek szabad áramlása széles alapot nyújt a problémameglátó és -megoldó képesség fejlesztéséhez. A gondolkodási műveletek összekapcsolódásának a legkülönbözőbb variációi jelentkezhetnek, ez fejleszti a hajlékonyságot, a dialektikus látásmódot. A kitűzött feladatok összhangba hozhatók az egyes csoportok fejlettségi szintjével.

A divergens megoldások biztosítása érdekében a tanár átfogalmazza a tankönyvi feladatot (Matematika 5. 237/13.): Térképvázlatot látsz a kincses szigetről. A kincs a magányos tölgyfától és a sziklától egyenlő távolságra, a parttól pedig olyan messze van, mint amekkora M és S távolsága. Keresd meg a kincset! (Eredeti szövegben „tengertől"!). Egyes csoportok (szükség esetén) tárgyi manipulálásból indulnak ki. Önállóan jutnak el arra a gondolatra, hogy az egyes feltételeket külön kell vizsgálniuk, majd a kérdéses ponthalmazok közös részét kell meghatározniuk.

Ha az egyes csoportok eljutnak egy-egy lehetséges rejtekhely kijelöléséig, biztatjuk őket, hogy további lehetséges megoldásokat keressenek. A rugalmas gondolatváltások lehetőségei:

— A tengeren van a kincs (hajó, bója).
— Térbeli megoldásra térnek át.
— A sziget partvonalának mint zárt görbének a figyelembevétele.

A csoportok különböző ötleteken alapuló, különböző színvonalú megoldásait közösen megvitatják, „ötletbörzével" továbbfejlesztik; a tanulók ötleteiket kötetlenül elmondhatják, vagy értékelés nélkül kapcsolódhatnak mások ötleteihez.

Csak az összes fölmerülő ötlet után kerül sor a társak, illetve a tanár értékelésére.

IRODALOM

[1] DR. ÁGOSTON GYÖRGY: *Neveléselmélet*. Tankönyvkiadó, Bp. 1970.
[2] DR. NAGY JÓZSEF: *Köznevelés és rendszerszemlélet*. OOK. Veszprém, 1979.
[3] *Matematika általános iskola 5. osztály*. Tankönyvkiadó, Bp. 1978.
[4] *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve*. OPI. 1978.
[5] M. ROEBUCK—D. UNWIN: *Célkitűzések meghatározása*. OOK. Bp. 1976.

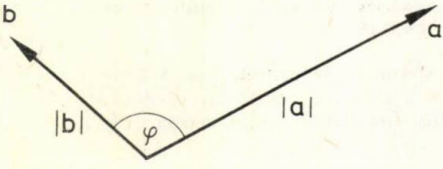
DR. VAJDA ISTVÁN
középiskolai szakfelügyelő
Zalaegerszeg

Néhány javaslat a skaláris szorzatnak feladatmegoldásokban való felhasználására

Az új gimnáziumi tantervek (alapterv, fakultatív „A", illetve „B" variáns) a III. osztály első féléves tananyagában tartalmazzák törzsanyagként, A trigonometria alkalmazásai című fejezet részeként a két vektor skaláris szorzatának értelmezését, alaptulajdonságait, valamint koordinátás alakjának tárgyalását.

Mivel mindhárom tantervi variánsban szó szerint megegyezik a fenti témakör, akár tanórán, akár szakkörön feladatok megoldásában támaszkodhatunk a következő ismeretekre:

Ha az **a**, illetve **b** vektorok abszolút értékét $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, hajlásszögét φ és vektorkoordinátáit — ugyanabban az **i**, **j**, **k** vektorkoordináta-rendszerben — $(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$, illetve $(b_1\,;\,b_2\,;\,b_3)$ jelöli, akkor:



1. ábra

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi,$$

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3.$$

(1)-ből és (2)-ből: ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ esetén)

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{3}$$

Ha $\mathbf{c}$ is vektor és λ valós szám, akkor:

$$\begin{aligned} &a)\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \\ &b)\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \\ &c)\ \lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{b}), \\ &d)\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 \geqq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Mivel $-1 \leqq \cos \varphi \leqq 1$, ezért (1)-ből:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leqq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|, \tag{5}$$

illetve a jobb oldali egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leqq \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2. \tag{6}$$

(5)-ben és (6)-ban egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor egyirányú!

Mivel $\cos 90^\circ = 0$, valamint $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén $|\mathbf{a}| = 0$, ezért:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \tag{7}$$

akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. (Figyelembe véve, hogy a $\mathbf{0}$ vektor bármely vektorra merőlegesnek tekinthető!)

Bár a tantervek koordinátageometria témakörében tételesen nem szerepel, de a fakultatív csoportokkal, illetve szakkörön feltétlenül érdemes tárgyalni a pont és egyenes távolságának egyszerű — a skaláris szorzat geometriai jelentése alapján levezethető — meghatározását az egyenes normálvektoros egyenletének segítségével:

Ha az $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú és a $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő e egyenes $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ egyenletében a normálvektor egységvektor (azaz $A^2 + B^2 = 1$), akkor a $Q(q_1; q_2)$ pontnak e egyenestől való távolsága:

$$d_{Qe} = |Aq_1 + Bq_2 - Ax_0 - By_0|. \tag{8}$$

Számos olyan matematikai (geometriai és nem geometriai) és gyakorlati probléma van, melyet a skaláris szorzat alkalmazásaként tárgyalhatunk. Ezek közül mutatunk be most néhányat. A válogatásban elsősorban az a szempont vezetett bennünket, hogy igen különböző területekről vett problémák tárgyalásával a skaláris szorzat széles körű alkalmazhatóságát érzékeltessük. Ezzel mintegy a vektorok matematikában betöltött egységesítő, különböző részterületeket összekapcsoló szerepére is szeretnénk rávilágítani, mellyel egyben fontos nevelési feladatokat is megvalósíthatunk.

Igen alkalmas a skaláris szorzat — és egyáltalán a vektorok — sík- és térgeometriai problémák párhuzamos tárgyalására. Ezért igyekszünk vegyesen sík- és térgeometriai feladatokkal is foglalkozni.

Egy rövid cikk keretében nyilván nincs lehetőség az alkalmazások részletekbe menő tárgyalására. Ezért a továbbiakban problémakörönként csoportosítva néhány feladat megoldását mutatjuk csak be, majd — a teljesség igénye nélkül — felsorolunk olyan feladatokat, illetve a rendelkezésre álló példatárakból, szakkönyvekből olyan feladatoknak a sorszámát, amelyek hasonló módszerrel megoldhatók.

A közölt, illetve javasolt feladatokat kisebb részben tanórán, többségében iskolai és megyei központi szakkörön már feldolgoztuk. Legtöbbször azt a módszert alkal-

maztuk, hogy hagyományos úton, vektorok nélkül is, illetve vektorokkal többféleképpen is megoldottuk a feladatokat, és összevetettük a megoldásokat. E rövid cikkben elsősorban a legrövidebb úton történő vektoros megoldásokat közöljük. Ezek nagy részét szakköri munkán tanítványaimmal közösen oldottuk meg.

a) A skaláris szorzat geometriai alkalmazásai

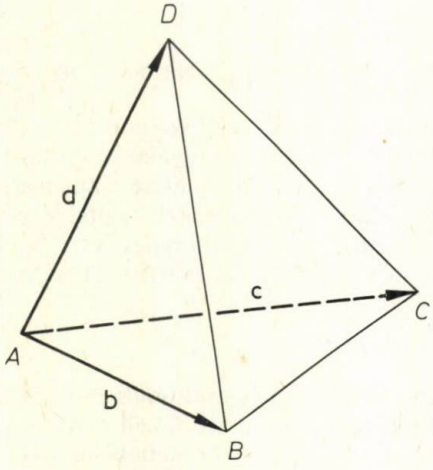
Sík- és térgeometriában az olyan bizonyításos, illetve számításos feladatokban használható fel jól a skaláris szorzat, melyek a merőlegességgel kapcsolatosak, s így a (7) tétel alkalmazható. Például:

a/**1.** Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder szemköztes élei merőlegesek egymásra!

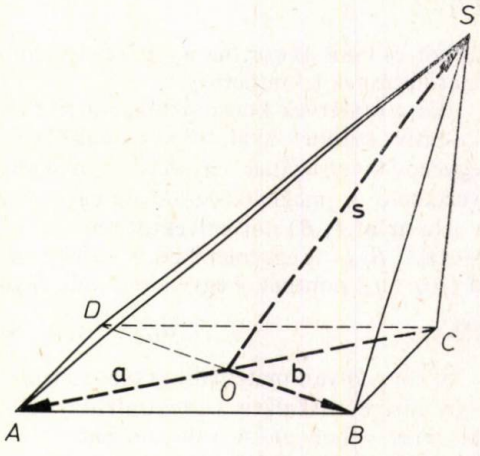
A megoldás: Tekintsük az A csúcsból induló élvektorokat (2. ábra). Mivel a tetraéder szabályos: $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$, hiszen egyforma hajlásszögű és abszolút értékű vektorok skaláris szorzatáról van szó. Ezért:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{d})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}=0,$$

azaz (7) alapján $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DC}$. Hasonlóan bizonyítható a másik két szemköztes élpár merőlegessége is.



2. ábra



3. ábra

A következő feladat viszont azt mutatja, hogy a merőlegességgel kapcsolatos feladatokon kívül más problémáknál is célravezető a vektorok, illetve skaláris szorzatuk alkalmazása:

a/**2.** Tekintsük az $ABCD$ alapú S csúcsú négyzetes gúlát. Igazoljuk, hogy $SA^2+SC^2=SB^2+SD^2$!

A megoldás: Legyen O az alap középpontja és $\overrightarrow{OS}=\mathbf{s}$ (3. ábra). Ekkor $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$ és $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$, valamint $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$, azaz $\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2$. Ezért (4)-et alkalmazva:

$$SA^2+SC^2=(\overrightarrow{AS})^2+(\overrightarrow{CS})^2=$$

$$=(\mathbf{s}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{s}+\mathbf{a})^2=2\mathbf{s}^2+2\mathbf{a}^2.$$

Ugyanígy $SB^2+SD^2=2s^2+2b^2$. S ezzel állításunkat igazoltuk. A megoldásból következik, hogy az állítás téglalap alapú gúlára is igaz. Sőt akkor is, ha az S pont benne van az $ABCD$ téglalap síkjában!

Hasonló módszerrel megoldható feladatok:

Thálész tétele; Arányossági tételek a derékszögű háromszögben, s a cikk végén található irodalomból:

[3]: **1732., 1849., 1959., 1960., 1962., 1965., 1968., 2036.,** valamint a **3178—3250.** feladatok;

[7]: **130., 135., 169., 170.** és az 556. oldal **1.** feladata;

[8]: 103. oldal **4., 5., 6.** és 109. oldal **3—6., 11.** és **14.** feladatai.

Nézzünk néhány számításos feladatot is:

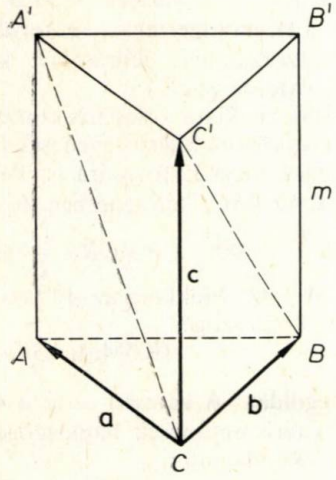
a/**3.** Az $ABCA'B'C'$ szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle a. Számítsuk ki a térfogatát, ha tudjuk, hogy a CA' és BC' lapátlók merőlegesek egymásra!

Nyilván az oldalél (ami egyben a magasság is) kiszámítására kell törekedni. A feladat alkalmas igen különböző megközelítésű megoldásokra. Az alábbiakban három különböző megoldás vázát közöljük.

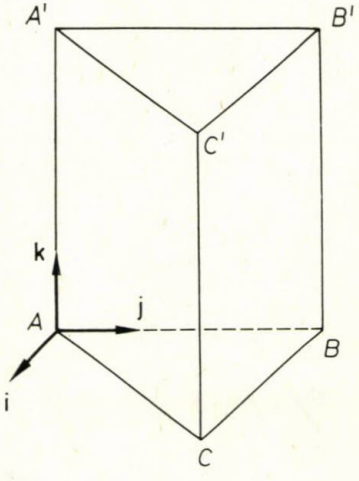
I. *Vektorokkal:* A 4. ábra jelöléseit alkalmazva $\overrightarrow{CA'} \perp \overrightarrow{BC'}$ miatt $\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BC'}=0$. Ezért:

$$\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BC'} = (\mathbf{a}+\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}^2 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Mivel egyenes a hasáb: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$. Másrészt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 60° = \frac{1}{2} \cdot a^2$. Ezért $\mathbf{c}^2 = \frac{1}{2} \cdot a^2$, azaz $m = |\mathbf{c}| = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ennek ismeretében a téfogat már kiszámítható.



4. ábra



5. ábra

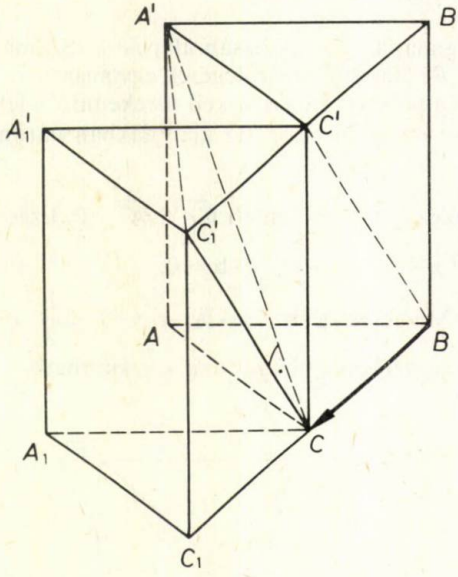
II. *Vektorkoordinátákkal:* Helyezzük a hasábot az **i**, **j**, **k** vektorkoordináta-rendszerbe pl. az 5. ábrán látható módon. Az **I.** megoldáshoz hasonlóan a $\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BC'}=0$ egyenletből tudjuk majd m-et kiszámítani, csak most a vektorkoordinátákkal dolgozunk. Az ábra alapján:

$$C\left(a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) \quad \text{és} \quad A'(0; 0; m).$$

Ezekből: $\overrightarrow{CA'}\left(-\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};m\right)$. Hasonlóan: $B(0;a;0)$ és $C'\left(a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\right)$, illetve: $\overrightarrow{BC'}\left(a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};m\right)$. A feltétel szerint:

$$\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{BC'}=-a^2\cdot\frac{3}{4}+\frac{a^2}{4}+m^2=0,\ \text{s innen } m \text{ meghatározható.}$$

III. *Hagyományos úton:* Toljuk el a hasábot a $\overrightarrow{BC}$ vektorral. Így az $A_1C_1CA_1'C_1'C'$ hasábot kapjuk (6. ábra). Ekkor a feltétel szerint $C'B \parallel C_1'C \perp CA'$, azaz $C_1'CA'$ háromszög derékszögű, melyben a $C_1'A'$ átfogó az eltolás miatt az ABC szabályos háromszög magasságának kétszerese, tehát $a\cdot\sqrt{3}$ lesz. Másrészt $C'B=C_1'C=A'C=\sqrt{m^2+a^2}$, s így m a $C_1'CA'$ háromszögből Pitagorasz-tétellel kiszámítható.



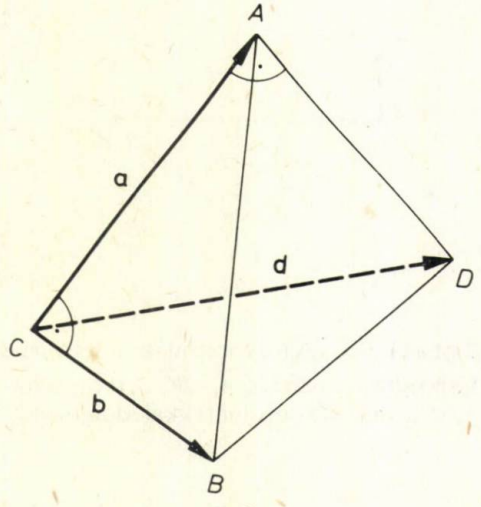
6. ábra

Az *a*/**3.** feladat kapcsán tanulságos kérdéseket is megfogalmazhatunk a tanulóknak. Például a feltétel szerint $CA' \perp BC'$. Merőleges-e vajon az AB' oldallapátló a CA'-re, illetve BC'-re? A kérdésekre a választ — akár az **I.**, akár a **II.** módszerrel — vektorok skaláris szorzatának felírásával kapjuk meg. (Merőlegesek.)

Felhasználható a skaláris szorzat térelemek, köztük kitérő egyenesek hajlásszögének meghatározására is. Például:

a/**4.** Az $ABCD$ tetraéderben $ACB\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 90°$, $CA=CB=\frac{1}{2}\cdot AD=a$ és $CD \perp AB$. Mekkora az ACB és ACD lapok közti szög?

(KöMaL. Gy. 1989.)



7. ábra

A megoldás: A keresett szög a CB és AD kitérő egyenesek hajlásszöge lesz. A 7. ábra alapján:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=$$

$$=\frac{\mathbf{b}(\mathbf{d}-\mathbf{a})}{a\cdot 2a}=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{2\cdot a\cdot a}=$$

$$=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}{2a^2}\quad \text{mert } \mathbf{b}\perp\mathbf{a} \text{ miatt } \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=0.$$

Másrészt $\mathbf{a} \perp \overrightarrow{AD}$ miatt $\mathbf{a}(\mathbf{d}-\mathbf{a})=0$, ezért $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{a}^2=a^2$. Ugyanígy: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD}$ miatt $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{d}=0$, ezért $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$. Ezeket felhasználva:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{amiből} \quad \varphi = 60°.$$

Hasonló módon megoldható feladatok:
[3]: **2023.**, **2024.**, **2026.**, **2027.**, **2162.**

b) A skaláris szorzat alkalmazása trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásánál

Bizonyos trigonometrikus egyenletek gyökei precízen, a gyökvesztés, illetve hamis gyökök elkerülésének veszélye nélkül megkaphatók skaláris szorzat segítségével. Nézzük mindjárt általánosan:

b/**1.** Mely valós x-ekre igaz, hogy

$$a\cdot\cos d\cdot x + b\cdot\sin d\cdot x = c,$$

ahol a, b, c és d adott 0-tól különböző valós számok? (Ha közülük bármelyik is 0, a kapott egyenlet igazsághalmazának meghatározása lényegesen leegyszerűsödik, így ezekkel az esetekkel felesleges foglalkoznunk!)

A megoldás: Legyen $\mathbf{u}(a; b)$ és $\mathbf{v}(\cos d\cdot x;\ \sin d\cdot x)$. Ekkor egyenletünk $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=c$ alakban írható. Alkalmazva (1) formulát, $|\mathbf{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$ és $|\mathbf{v}|=1$ miatt:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\varphi = c, \quad \text{ahol} \quad 0 \leqq \varphi \leqq 180° \text{ az } \mathbf{u} \text{ és } \mathbf{v}$$

vektorok hajlásszöge. Innen:

$$(*) \qquad \cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

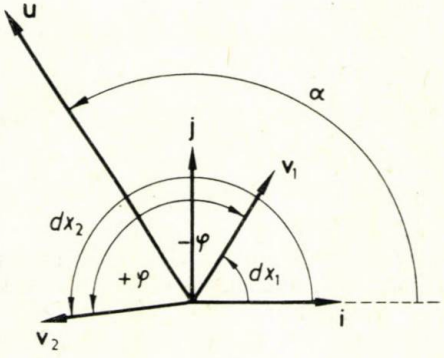
Ha $\dfrac{|\mathbf{c}|}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$, az egyenlet igazsághalmaza az üres halmaz lesz. Ha viszont $\dfrac{|\mathbf{c}|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqq 1$, $(*)$-ból φ egyértelműen meghatározható.

Mivel $\mathbf{u}$ egy ismert vektor, pozitív α irányszögét (azt a legkisebb szöget, mellyel az $\mathbf{i}$ vektort pozitív irányban az origó körül elforgatva $\mathbf{u}$ vektorral egyirányú vektort kapunk) is meg tudjuk határozni. ($\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{b}{a}$, vagy $\operatorname{tg}(\alpha-180°)=\dfrac{b}{a}$, az $\mathbf{u}$ vektorkoordinátáinak előjelétől függően!)

α és φ ismeretében a $\mathbf{v}$ vektor irányszöge, s ebből $d\cdot x$ lehetséges értékei meghatározhatók. Mivel $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektorhoz képest kétféleképpen is elhelyezkedhet (8. ábra), kivéve a $\varphi=0°$ esetet, $d\cdot x_{1,2}=\alpha\pm\varphi+2k\pi$, és ebből

$$x_{1,2} = \frac{\alpha\pm\varphi+2k\pi}{d}, \quad \text{ahol} \quad k\in\mathbf{Z}.$$

Az előbbi módszert egyenlőtlenség megoldásánál is alkalmazhatjuk. Például



8. ábra

b/**2.** Mely valós x-ekre igaz, hogy

$$a \cdot \cos d \cdot x + b \cdot \sin d \cdot x > c?$$

A *b*/**1**-nél alkalmazott módszerrel lényegében a $\cos \varphi > \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ egyenlőtlenség vizsgálatára vezethető vissza a megoldás. ($a=b=0$ eseteket kivéve.)

Ha $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$, akkor nincs megoldás;

Ha $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} < -1$, akkor minden valós szám beletartozik az igazsághalmazba;

Ha $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqq 1$, akkor a φ lehetséges értékeit tartalmazó intervallumok meghatározhatók stb.

Hasonló módon megoldható feladatok:

[4]: 56. oldaltól: **500.** *b), e)*, **502.**, **503.** *h), i)*, **507.** *c)—h)*. **508.** *p)*;

[8]: 116. oldaltól: **18.** *b), c), d)*, **30.** .**31.**

c) A skaláris szorzat koordinátageometriai alkalmazásai

Ezt a területet csak röviden érintjük, részletes kifejtésére itt nincs lehetőségünk. Az egyenes, illetve térben a sík normálvektoros egyenletének tárgyalása, egyenesek merőlegességével kapcsolatos feladatok megoldása, térelemek hajlásszögének, távolságának kiszámítása mind kapcsolódik a skaláris szorzathoz, illetve annak ismeretében rövidebben, egyszerűbben tárgyalható.

Ennek alátámasztására egy korábbi felvételi feladat megoldását mutatjuk be:

c/**1.** Állapítsa meg, hogy hány olyan e egyenes van, mely áthalad az $A(1; 8)$ ponton, és egyenlő távolságra van a $P(-3; 5)$ és $Q(9; -1)$ pontoktól! Írja fel az egyenesek egyenletét! (1980-as műszaki feladatsor 6. feladata.)

Megoldás: Legyen a keresett egyenes normálvektora $\mathbf{n}_0(b; c)$ és $|\mathbf{n}_0|=1$. Ekkor e egyenlete: $bx+cy-b-8c=0$.

(8) alapján: $d_{Pe}=|-4b-3c|$ és $d_{Qe}=|8b-9c|$.

A feltétel szerint: $|-4b-3c|=|8b-9c|$.

Innen: $-4b-3c=8b-9c$ vagy $-4b-3c=-8b+9c$.

Azaz: $c=2b$, vagy $3c=b$.

Tehát két egyenes is eleget tesz a feltételeknek, és megkaptuk normálvektoraik koordinátáinak arányát.

Ezért az egyik esetben: $\mathbf{n}_1(1; 2)$ és $A(1; 8)$ adatokból:

$$e_1: \quad x+2y=17;$$

a másik esetben: $\mathbf{n}_3(3; 1)$ és $A(1; 8)$ adatokból:

$$e_2: \quad 3x+y=11.$$

(Az egyenletek felírásánál már nem szükséges, hogy a normálvektorok egységvektorok legyenek.)

Javasolt irodalom és hasonló módon megoldható feladatok:

[4]: **599.**, **641.**, **649.**, **677.**, **678.**, **682.**, **683.**, **689.**, **720.**, valamint a **729—782.** feladatok;

[6]: **33—37.**, **60—69.**, **91—93.**, **99.**, **100.**, **111—130.**, **148—152.** oldalak anyaga;

[8]: **308—323.** oldalak anyaga.

d) A skaláris szorzat alkalmazása algebrai problémáknál

Itt elsősorban (5) és (6) összefüggések alkalmazásaként egyenlőtlenségek, illetve szélsőérték-feladatok megoldására gondolunk. Nézzünk néhány példát.

d/**1.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges x, y esetén igaz a következő egyenlőtlenség: $x+y+xy \leqq x^2+y^2+1$. (KöMaL. Gy. 1817.) A megoldás: Legyen $\mathbf{a}(x; 1; y)$ és $\mathbf{b}(1; y; x)$. Ekkor (5) összefüggést alkalmazva:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x+y+xy \leqq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = \sqrt{x^2+1+y^2} \cdot \sqrt{1+y^2+x^2} = x^2+y^2+1.$$

d/**2.** Határozzuk meg azt a legkisebb n természetes számot, amelyre az

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leqq n(x^4+y^4+z^4)$$

egyenlőtlenség minden valós x, y, z értékre teljesül! (KöMaL. Gy. 1864.)

Megoldás: Legyen $\mathbf{a}(x^2; y^2; z^2)$ és $\mathbf{b}(1; 1; 1)$.
Ekkor $\mathbf{a}^2 = x^4+y^4+z^4$, $\mathbf{b}^2 = 3$ és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x^2+y^2+z^2$. Ezért (6)-ot alkalmazva:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leqq 3(x^4+y^4+z^4)$$

bármely valós x, y, z-re igaz, és egyenlőség csak $x^2=y^2=z^2$ esetén áll fenn. Ezért n lehetséges legkisebb értéke 3, melyet $x^2=y^2=z^2$ esetén fel is vesz.

d/**3.** Számítsa ki, hogy az $x^4+y^4+\dfrac{2}{x^2y^2}$ kifejezés milyen x, y értékpárok esetén lesz a legkisebb! (1973. évi műszaki felvételi feladatsor 8. feladata.)

A megoldás vektorokkal: Legyen $\mathbf{a}\left(x^2; y^2; \dfrac{\sqrt{2}}{xy}\right)$ és $\mathbf{b}\left(y^2; x^2; \dfrac{\sqrt{2}}{xy}\right)$. Ekkor $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ és (5)-öt alkalmazva:

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2} \geqq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2x^2y^2+\frac{2}{x^2y^2} = 2\left[\left(xy-\frac{1}{xy}\right)^2+2\right] \geqq 4.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$xy-\frac{1}{xy} = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} \ (\text{azaz } x^2 = y^2) \text{ egyszerre teljesülnek.}$$

Ebből a keresett értékpárok:

$$(1; 1), \quad (1; -1), \quad (-1; 1) \quad \text{és} \quad (-1; -1).$$

Az ilyen jellegű feladatok tárgyalásánál is célszerű más módszerrel történő megoldásokat is bemutatni.

Hasonló módon megoldható feladatok:

[7]: **44.** és **62.** feladatok, valamint a **473.** oldal;
[8]: 116. oldal **17.**, **18.** *a)*, **26—29.** feladatok;
[9]: A **9.** oldalon levő feladat.

Természetesen folytathatnánk a sort. Befejezésül annyit teszünk még hozzá, hogy a „B" variánsú fakultatív csoportok munkájában a „Lineáris algebra elemei"-vel

összefüggő feladatok egy része is jól kapcsolódik témánkhoz. Könnyen lehet és nevelési szempontból feltétlenül érdemes gyakorlati, közgazdasági jellegű feladatokat is megoldatni a skaláris szorzat alkalmazásaként. Ilyen típusú feladatok pl. [5]: **233—283.** és [2] szakkönyvekben találhatók.

IRODALOM

[1] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve.* Tankönyvkiadó, Bp. 1978.
[2] R. A. CARMEN: *Programozott vektoralgebra.* Tankönyvkiadó, Bp. 1969.
[3] *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* Tankönyvkiadó, Bp. 1969.
[4] *Geometriai feladatok gyűjteménye II.* Tankönyvkiadó, Bp. 1970.
[5] KEMENY—SNELL—THOMPSON: *A modern matematika alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1971.
[6] LUKÁCS OTTÓ: *Koordinátageometria vektorokkal síkban és térben.* Tankönyvkiadó, Bp. 1974.
[7] MOLNÁR EMIL: *Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye.* Tankönyvkiadó, Bp. 1974.
[8] POGÁTS FERENC: *Vektorgeometria.* Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1970.
[9] VAJDA ISTVÁN: *A skaláris szorzat tanításának lehetőségeiről.* A Matematika Tanítása 1981. 1. szám 5. oldal.

HÓDI ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

Beszámoló a XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

A XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát 1981. július 8-tól 20-ig az Amerikai Egyesült Államokban rendezték meg: azon 5 világrész 27 állama vett részt, mégpedig: Ausztrália, Ausztria, Belgium, Brazília, Bulgária, Csehszlovákia, Egyesült Államok, Finnország, Franciaország, Görögország, Hollandia, Izrael, Jugoszlávia, Kanada, Kolumbia, Kuba, Lengyelország, Luxemburg, Magyarország, Mexikó, Nagy-Britannia, Német Szövetségi Köztársaság, Románia, Svédország, Szovjetunió, Tunézia és Venezuela.

Luxemburgot egy diák képviselte a versenyen, Tunéziát kettő, Magyarországot és Romániát négy-négy, Csehszlovákiát és Mexikót öt-öt, Izraelt és a Szovjetuniót hat-hat; a többi országból nyolc-nyolc fős együttesek voltak jelen.

A diákolimpia versenyzőinek július 13-án és 14-én — mindkét napon négy és fél óra alatt — három-három feladatot kellett megoldaniuk a washingtoni Georgetown Egyetemen. Ezeket a feladatokat a küldöttségek vezetőiből álló zsüri válogatta ki — a Virginia állambeli Fredericksburg városka Mary Washingtonról elnevezett kollégiumában — a közül a 19 feladat közül, amelyeket a vendéglátó ország feladat-összeállító bizottsága szemelt ki a vendégküldöttségektől előzetesen beérkezett feladatjavaslatokból. A zsüri elnöke Dr. Samuel L. Greitzer, a New Jersey állam New Brunswick városában levő Rutgers Egyetem professzora volt.

A XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián kitűzött feladatok:

Első nap

1. P belső pontja egy adott ABC háromszögnek. P-ből a BC, CA, illetve AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja rendre D, E és F.

Határozza meg az összes olyan P pontot, amelyre a

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

összeg a legkisebb!

2. Legyen $1 \leqq r \leqq n$, és tekintsük az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes r-elemű részhalmazát! Vegyük e részhalmazok mindegyikéből a legkisebb elemet, és jelölje $F(n, r)$ ezeknek az elemeknek számtani közepét!

Bizonyítsa be, hogy

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

3. Állapítsa meg

$$m^2+n^2$$

legnagyobb értékét, ha m és n olyan egész számokat jelölnek, amelyekre

$$m, n \in \{1, 2, \ldots, 1981\}$$

és

$$(n^2-mn-m^2)^2 = 1.$$

Második nap

4. (*a*) Mely $n>2$ esetén van n egymást követő pozitív egész számból álló olyan halmaz, amelynek legnagyobb eleme osztója a többi $n-1$ elem legkisebb közös többszörösének?

(*b*) Mely, 2-nél nagyobb egész számok esetén van pontosan egy olyan halmaz, amely a fenti tulajdonságú?

5. Három egyenlő sugarú kör egy adott háromszög belsejében helyezkedik el, és egy közös O pontjuk van. Mindegyik kör érinti a háromszög két oldalát.

Bizonyítsa be, hogy a háromszög beírt körének középpontja, körülírt körének középpontja és az O pont egy egyenesre esnek!

6. Az $f(x, y)$ függvény minden nemnegatív egész x, y esetén kielégíti az

(1) $$f(0, y) = y+1;$$

(2) $$f(x+1, 0) = f(x, 1);$$

(3) $$f(x+1, y+1) = f\big(x, f(x+1, y)\big)$$

feltételeket.

Számítsa ki $f(4, 1981)$ értékét!

A feladatok rendre az angol, a nyugatnémet, a holland, a belga, a szovjet és a finn küldöttség javaslatai közül valók voltak. Mindegyik feladat helyes megoldásáért egyaránt 7 pontot kaptak a versenyzők. Egy-egy tanuló tehát maximálisan 42 pontot szerezhetett, míg egy 8 fős csapat legfeljebb 336 pontot érhetett el.

A versenyzők feladatmegoldásait először saját vezetőik bírálták el, majd az elbírálás egyöntetűségéről a zsüritől független koordinátorok gondoskodtak. A koordinátorok döntését a zsüri csak akkor módosíthatta, ha a módosítást a szavazásra jogosult zsüritagoknak több mint fele támogatta. A végső döntés után a versenyzők annyi pontot kaptak, amennyi első táblázatunkban található.

Állam	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	összes
	tanulójának pontszáma								
Ausztrália	22	13	12	10	17	12	8	28	122
Ausztria	42	41	41	36	37	42	21	30	290
Belgium	37	24	25	38	6	3	3	3	139
Brazília	42	23	21	14	17	13	21	21	172
Bulgária	32	42	40	34	28	37	33	41	287
Csehszlovákia	38	38	40	42	32				190
Egyesült Államok	42	42	42	39	42	35	39	33	314

Állam	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	összes
	tanulójának pontszáma								
Finnország	27	41	17	10	31	9	38	33	206
Franciaország	29	15	42	26	8	29	42	18	209
Görögország	24	11	13	13	15	2	12	14	104
Hollandia	25	25	37	36	27	16	17	36	219
Izrael	42	32	25	31	16	29			175
Jugoszlávia	26	31	42	32	23	37	35	20	246
Kanada	42	25	23	16	35	42	37	29	249
Kolumbia	14	13	13	11	1	13	14	14	93
Kuba	25	34	22	12	19	9	14	6	141
Lengyelország	35	18	41	36	24	28	35	42	259
Luxemburg	42								42
Magyarország	41	42	41	40					164
Mexikó	3	4	2	2	1				12
Nagy-Britannia	42	38	41	36	27	37	38	42	301
NSZK	41	39	37	42	42	41	28	42	312
Románia	36	35	33	32					136
Svédország	22	20	17	32	32	28	38	18	207
Szovjetunió	42	33	36	35	42	42			230
Tunézia	14	18							32
Venezuela	6	3	9	4	14	4	23	1	64

A díjak odaítélésében a zsüri szótöbbséggel hozta meg döntését. Ennek értelmében I. díjban részesültek azok a versenyzők, akik legalább 41 pontot szereztek; II. díjat kaptak azok, akiknek pontszáma legalább 34, legfeljebb pedig 40 volt; végül III. díjat azoknak a tanulóknak adtak, akik legalább 26, de legfeljebb 33 pontot értek el.

Második táblázatunk azt mutatja, hogyan oszlottak meg a díjak a részt vevő országok tanulói között. Az utolsó oszlopban a versenyzők átlagos teljesítményét is feltüntettük államonként. A csapatok különböző létszáma miatt ez az adat is hasznos lehet az eredmények értékelésekor.

Állam	I.	II.	III.	összes	
	díjának száma				átlagos teljesítménye
Ausztrália	0	0	1	1	36,31%
Ausztria	4	2	1	7	86,31%
Belgium	0	2	0	2	41,37%
Brazília	1	0	0	1	51,19%
Bulgária	2	3	3	8	85,42%
Csehszlovákia	1	3	1	5	90,48%
Egyesült Államok	4	3	1	8	93,45%
Finnország	1	1	3	5	61,31%
Franciaország	2	0	3	5	62,20%
Görögország	0	0	0	0	30,95%
Hollandia	0	3	1	4	65,18%
Izrael	1	0	3	4	69,44%
Jugoszlávia	1	2	3	6	73,21%
Kanada	2	2	1	5	74,11%
Kolumbia	0	0	0	0	27,68%
Kuba	0	1	0	1	41,96%
Lengyelország	2	3	1	6	77,08%
Luxemburg	1	0	0	1	100,00%
Magyarország	3	1	0	4	97,62%
Mexikó	0	0	0	0	5,71%
Nagy-Britannia	3	4	1	8	89,58%
NSZK	5	2	1	8	92,86%
Románia	0	2	2	4	80,95%
Svédország	0	1	3	4	61,61%
Szovjetunió	3	2	1	6	91,27%
Tunézia	0	0	0	0	38,10%
Venezuela	0	0	0	0	19,05%

A XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián tehát összesen 36 első, 37 második és 30 harmadik díjat, együttvéve 103 díjat osztottak ki. A díjazottak oklevelet, érmet és tárgyi ajándékot kaptak. A teljes pontszámot elért I. díjasok ajándéka egy Hewlett—Packard gyártmányú sokfüggvényes és programozható zsebszámológép volt, a 41 pontot szerzett I. díjasoké és a II. díjasoké pedig egy kvarcóra. Azok a csapatok, amelyeknek legalább két tagja I. díjas lett, külön is kaptak egy arannyal bevont érmet.

A magyar csapat vezetői Hódi Endre, az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Nevelési Osztályának vezetője és Dr. Reiman István, a Budapesti Műszaki Egyetem Geometriai Tanszékének docense voltak. Hazánkat a XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián a következő versenyzők képviselték:

1. **Károlyi Gyula,** a budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója;
2. **Simonyi Gábor,** az Eötvös Loránd Tudományegyetem Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumának IV. osztályos tanulója;
3. **Szabó Endre,** a budapesti Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója;
4. **Tardos Gábor,** a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium III. osztályos tanulója.

Az osztályok megjelölése az 1980—81. tanévre vonatkozik. A tanulók sorszáma megegyezik az első táblázatunkban találhatóval.

Károlyi Gyula a 4. feladat megoldására kapott 6 pontot, Szabó Endre az 1. feladatéra ugyancsak 6 pontot, míg Tardos Gábor a 3. feladat megoldásával csak 5 pontot szerzett; a többi feladatot versenyzőink kifogástalanul oldották meg. Ennek megfelelően Tardos Gábor II. díjas lett, a többiek I. díjat nyertek.

A magyar tanulókat ebben az évben is Dr. Reiman István készítette fel a versenyre. A felkészítéshez a vidéki központi szakkörök tevékenysége is hozzájárult. A diákolimpiára kiküldendő tanulók személyére a felkészítés záródolgozatának eredménye, valamint Dr. Reiman István kiegészítő tájékoztatása alapján Hódi Endre tett javaslatot a Művelődési Minisztérium Közoktatási Főosztályának.

A XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia egyes rendezvényein magyar részről jelen volt Dr. Csirmaz László is — a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének tudományos munkatársa, a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztő bizottságának tagja — az Ifjúsági Lapkiadó Vállalat kiküldetésében.

A diákolimpián kiosztott díjak nagy száma, pontosabban szokatlanul sok versenyző által elért igen magas összpontszám arra utal, hogy ez a verseny a kitűzött feladatok miatt könnyebb volt, mint az utóbbi esztendők nemzetközi matematikai diákolimpiái. Hogy több könnyű feladat is legyen a kitűzöttek között, erre határozott törekvés volt megfigyelhető a zsüri tagjainak többségénél, amit az indokolt, hogy ez alkalommal hat ország diákjai (az ausztráliaiak, kanadaiak, kolumbiaiak, mexikóiak, tunéziaiak és venezuelaiak) első ízben vettek részt ilyen versenyen, és a zsüri számukra is lehetővé kívánt tenni bizonyos sikerélményt. Utólag úgy tűnik azonban, hogy a zsüri ebben a tekintetben túlzásba esett. Legalább egy igazán nehéz feladat kitűzésével jobban szét lehetett volna húzni a a diákolimpia mezőnyét, amellett ez növelte volna a verseny színvonalát, az elért eredmények értékét. Itt meg kell jegyezni, hogy egy dolog komoly mértékben megnehezítette a zsüri tagjainak munkáját a kiválasztandó feladatok nehézségi fokának előzetes becslésében. Tudniillik a verseny szervezői a szokástól eltérően az általuk javasolt feladatoknak csak a szövegét bocsátották a zsüri tagjainak rendelkezésére a végső kiválasztáshoz, a megoldásokat azonban nem. Olyan esetben pedig, amikor ezt a kiválasztást meglehetősen rövid idő alatt kell elvégezni — most is így volt —, ez nehézséget is jelent, és nyilván károsan befolyásolja a végzett munka minőségét is. Másrészt viszont a sok jó eredmény miatt csaknem mindegyik küldöttség elégedetten tért vissza hazájába.

A koordinátorok jól látták el feladatukat.

A nemzetközi matematikai diákolimpiákon az a gyakorlat alakult ki, hogy négy hivatalos nyelvet használtak, főképpen a zsüri ülésein: az angolt, a franciát, a németet és az oroszt. Ezen a diákolimpián úgyszólván minden kommunikáció csak angol nyelven történt. Ez többek között azt is eredményezte, hogy a zsüri üléseinek diszkusszióiba a tagok egy része csak korlátozott mértékben tudott bekapcsolódni.

A diákolimpia szervezői nagy gonddal állították össze a program társasági részét, igyekeztek is megvalósítani, illetve lebonyolítani annak valamennyi pontját, ami azt eredményezte, hogy — különösen a vezetők számára — időnként fárasztóvá vált a program, továbbá alig akadt lehetőségük maguk választotta időtöltésre.

A diákolimpia záróünnepélyét Washington-

ban tartották július 19-én délután, a National Academy of Sciences nagy előadótermében. Itt osztották ki a díjakat, és ekkor olvasták fel Ronald Reagannek, az Egyesült Államok elnökének a XXII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia győzteseihez intézett üzenetét.

A magyar tanulóknak ezen a versenyen nyújtott teljesítményével minden tekintetben elégedettek lehetünk: feltétlenül dicséret illeti őket. Eredményük arra enged következtetni, hogy a felkészítés munkája is jó kezekben van. Ezt tovább kell folytatni és — ahol van rá lehetőség — fejleszteni is. Gondolunk itt elsősorban a tehetségek felkutatására, képességeik kellő kibontakoztatására. Reméljük, hogy előbb-utóbb a vidéki központi szakkörök szorgos tevékenysége is meghozza gyümölcsét. Igen hasznos hozzájárulást jelent a felkészítéshez korábbi diákolimpikonok bekapcsolódása, illetve bekapcsolása.

PÁLMAI ÉVA
tanár
Budapest

Tízes számrendszerből kettesbe és kettes számrendszerből tízesbe átalakító eszköz

A számrendszerekkel már az alsó tagozatos matematika keretében megismerkednek a tanulók. A számrendszerek közül kettőre nagyobb hangsúlyt teszünk. Az egyik a tízes számrendszer, amelyben mindennapi életünk számolási problémáit oldjuk meg; a másik az automatizálás és a számítógépek elterjedése miatt a kettes számrendszer.

A számok különböző számrendszerbeli alakjának megkeresése igen kevés tanuló számára jelent élményt. Ezért minden lehetséges módon motiválni kell tanulóinkat, hogy ne idegenkedjenek ettől a — tananyagban még viszonylag új — témától. Érdekesebbé, színesebbé tehető az anyagrész tanítása, ha a két számrendszer közötti átalakításokat, illetve az elvégzett átalakítások helyességének ellenőrzését automaták segítségével végezhetik a tanulók.

Egy ilyen, érdeklődést felkeltő, ugyanakkor viszonylag egyszerűen elkészíthető eszközt szeretnék most bemutatni.

Építés szempontjából legegyszerűbb lenne az integrált áramkörök felhasználása, de az volt a célom, hogy a tanulók számára érthető, általuk is (pl. 8. osztályos fizika szakkörön) elkészíthető legyen a berendezés, lehetőleg olcsó alkatrészek felhasználásával.

Tízes számrendszerből kettes számrendszerbe átalakító (decbinkonv)

Anyagszükséglete:
— 10 db kapcsoló,
— 11 db dióda,
— 4 db izzó,
— 1 db doboz,
— 2 db banánhüvely (tápfeszültség csatlakoztatásához).

Lehetőség szerint kétáramkörös kapcsolókat célszerű használni. Az egyik áramkör a konvertáló egységet, a másik pedig a kapcsolóba beépített vagy külön elhelyezett izzót működteti. A kapcsolókat vagy az izzókat a megfelelő tízes számrendszerbeli számokkal jelöljük.

Amint az 1. ábrán látható, a KO jelű kapcsolóra nincs feltétlenül szükség, csak a teljesség miatt érdemes beépíteni.

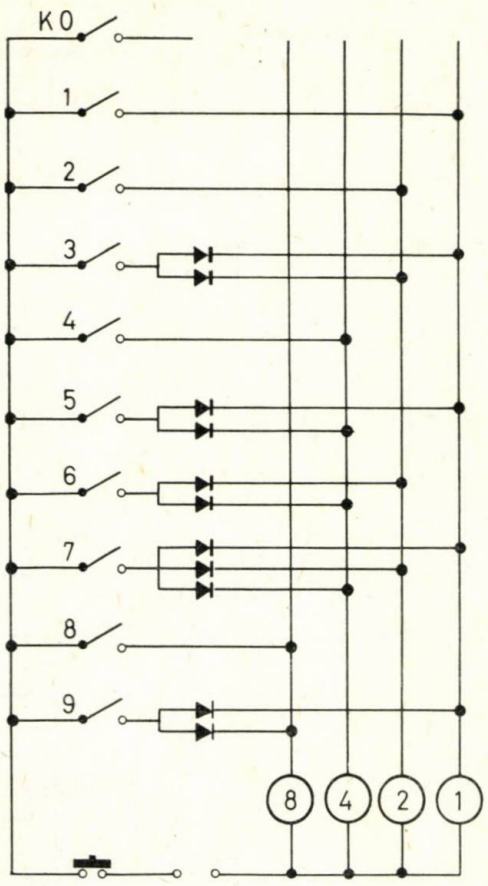
A négy izzólámpa az ún. BCD (binárisan kódolt decimális) kódnak megfelelően világít:

Decimális szám	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Érdekesebbé tehető a berendezés használata, ha az áramkörbe egy pillanatkapcsolót is beépítünk. Ez esetben csak a pillanatkapcsoló lenyomása után gyulladnak fel a megfelelő izzók, így a készülék a tanulók válaszának ellenőrzésére is alkalmas.

A felhasznált diódák típusát az izzók teljesítménye és az alkalmazott feszültség együttesen határozza meg. Bekötésük az áramforrás polaritásától függ.

A már megépített készülékben 1 db tízállású tárcsakapcsolót használtam. Természetesen tárcsakapcsoló esetén is megvalósítható, hogy a decimális számokat is világító izzók jelöljék, de ez esetben itt is kétáramkörös kapcsoló szükséges.

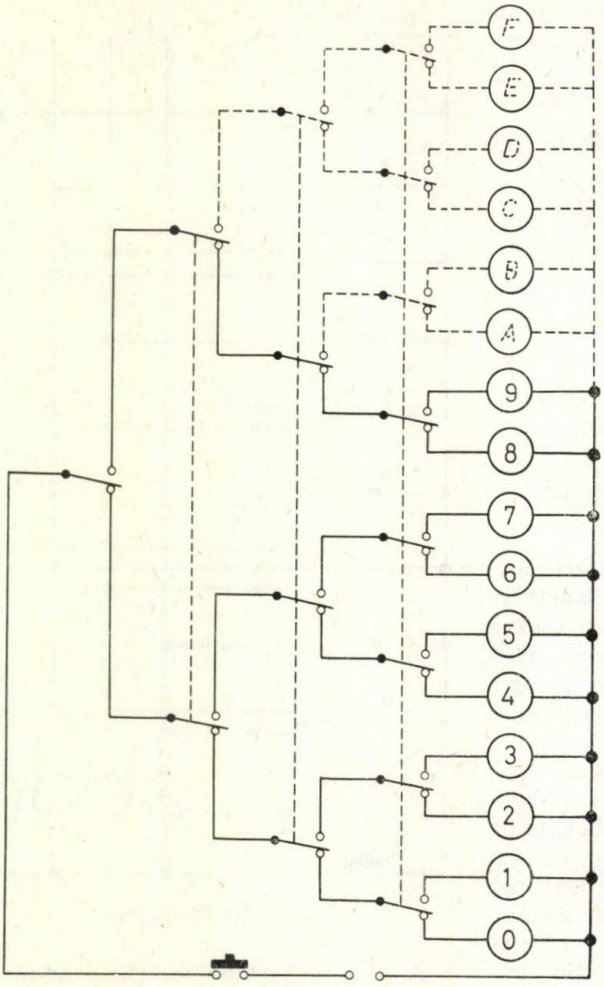


1. ábra. DECBINKONV

A már megépített berendezés kényelmesen elfért a TANÉRT-nél beszerezhető mértani testmodellsorozat téglatestjében (10,5 cm×15,5 cm×5,5 cm).

Kettes számrendszerből tízes számrendszerbe átalakító (bindeckonv)

Anyagszükséglete:
- 10 db izzó,
- 1 db 1 áramkörös 2 állású kapcsoló,
- 1 db 2 áramkörös 2 állású kapcsoló,
- 1 db 3 áramkörös 2 állású kapcsoló,
- 1 db 5 áramkörös 2 állású kapcsoló,
- 1 db doboz,
- 2 db banánhüvely.



2. ábra. BINDECKONV

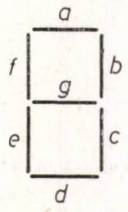
Mivel ilyen kapcsolók nehezen szerezhetők be, helyettük jelfogókat is használhatunk (6 áramkörös, kétállású, morse-érintkezős jelfogó).

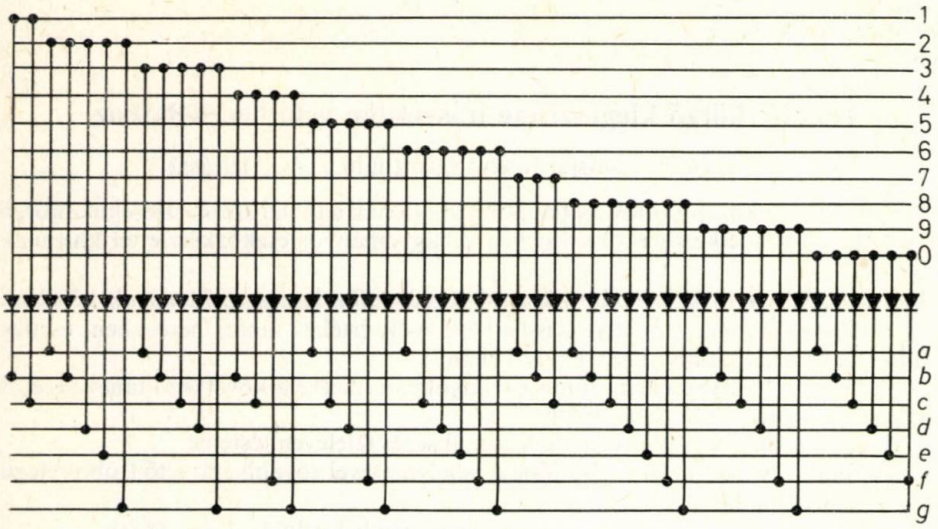
A berendezés elvi rajza a 2. ábrán látható.

Kis bővítéssel ugyanez az eszköz 2-es számrendszerből 16-os számrendszerbe való átalakításra is használható. További alkatrészek beépítésével pedig — a célszerűség határain belül — bármely 2^n (n természetes szám) alapszámú számrendszerig eljuthatunk. A berendezést felhasználhatjuk más módon is. Kibővítés vagy megfelelő átalakítás után egy alaphalmazból megadott tulajdonságú elemek kiválogatása is elvégeztethető vele (logikai játék elektromos változata).

Az általam megépített berendezésben nem külön izzók jelzik a decimális számokat, hanem 7 izzó segítségével megjelenítem azokat.

A 7 izzó elhelyezése a következő:

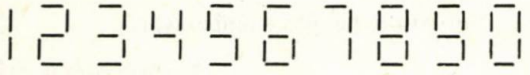




3. ábra. Diódamátrix

Ahhoz, hogy mindig a megfelelő izzók világítsanak, a 3. ábrán levő, 49 diódából álló kapcsolást kell elkészíteni.

Ekkor a decimális számok alakja a következő lesz:



A hét szegmenses kijelzőt működtető áramkört célszerű fóliás panelra készíteni, hogy könnyen áttekinthető és javítható legyen.

A diódák típusát itt is az alkalmazott feszültség és az izzók teljesítménye együttesen határozza meg.

Ez a berendezés is elhelyezhető a már említett téglatestmodellben. Üzemeltetéséhez egyenáram szükséges. Használhatunk elemeket is, de az izzók fogyasztását figyelembe véve célszerűbb hálózati tápegységhez csatlakozni.

A készüléket úgy építsük meg, hogy üzemeltethető legyen lehetőleg 12 V-os, de legfeljebb 24 V-os tápfeszültségről (balesetvédelem)!

A befektetett munka kamatostól megtérül, amikor gyermekeink alig várják, hogy használhassák eszközeinket. Közvetve fontos nevelési célok megvalósítását is elősegíthetjük velük.

Ezért jó munkát kívánok mindazoknak, akik hozzálátnak megépítésükhöz.

KANÁSZ LÁSZLÓ
tudományos munkatárs
Budapest

Tanulói körző kiegészítése írásvetítőn való használathoz

(Országos hasznosításra elfogadott újítás rövid leírása)

Az általános és középiskolák matematikatanárainak a táblai szerkesztésekhez körző és vonalzó áll rendelkezésre, amennyiben a hagyományos eszközkészlettel kívánnak dolgozni.

Az írásvetítő egyre kedveltebb oktatási segédeszköz lesz a szaktanárok körében. Nem is csoda, hiszen a többnyire ismert előnyök értékes tanári percekben, esetleg órákban realizálódhatnak. Ezek közül néhány:

— A fóliára írt anyag párhuzamos osztályokban, illetve a következő tanév azonos évfolyamának óráin újra felhasználható.

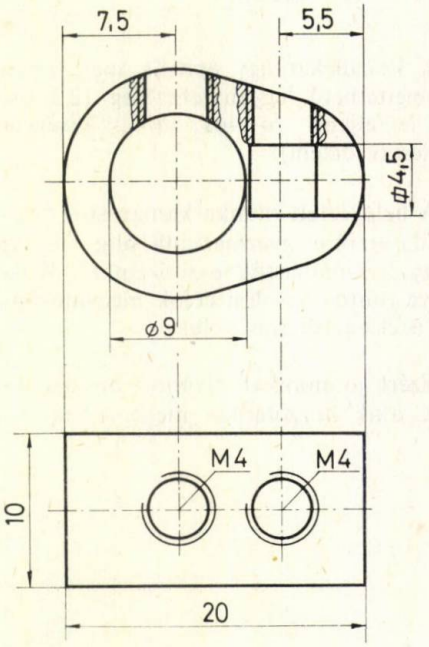
— Ugyanez vonatkozik az ismétléskor szükséges felelevenítésre is.

— A fóliára rajzolt ábra újabb fóliák ráhelyezésével tovább építhető (több rétegű vagy szendvicsfóliák).

— A tanár szerkesztés közben is osztályával szembefordulva dolgozik stb.

Azonban nehézséget jelent, hogy fólia használata esetén nem megoldott a körzővel való munka. Ennek az újításnak a tárgyát képező eszköz ezt a nehézséget kívánja kiküszöbölni, mert az a célja, hogy segítségével szerkesztéseket is el tudjunk végezni a fólián.

Anyagszükséglet: 1 db 10 mm × 15 mm × 20 mm méretű, jól megmunkálható fémtest;
2 db M4-es hengeres fejű csavar.



M=1:2

Az elkészítés a mellékelt rajz alapján könnyen megoldható.

Az eszközt úgy állítjuk össze használat céljára, hogy kiszereljük a körzőnek a ceruzahegyet tartalmazó részét, és a megmaradó szárdarabra az egyik csavar segítségével felerősítjük a kiegészítő tartozékot. A másik furatba kerül a filctoll; ezzel a körző már kész is a használatra.

ROZGONYI TIBOR—DR. VARECZA ÁRPÁD
tanársegéd docens
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

Bizonyos rekurzív sorozatokról

Dr. Máté László [A Matematika Tanítása 1981. évi 4. száma] „Szakköri feladatok a számsorozatok tanításához" című dolgozatában a rekurzív sorozatok témaköréből jó feladatsort ad középiskolai szakköri feldolgozásra. E témakörrel kapcsolatosan középiskolai szakköri füzet is megjelent a Tankönyvkiadó gondozásában ([2]). Ebben (és [3]-ban) útmutatást találunk az úgynevezett állandó együtthatós lineáris rekurzív sorozatok tetszőleges elemének explicit formában való megadására.

A következőkben — a fentiekben nem szereplő — rekurzív sorozatok közül olyanokkal foglalkozunk, amelyek elég gyakran fordulnak elő kitűzött feladatok között, illetve különböző példatárakban (például [1] 1/30 probléma).

Ez a fajta rekurzív sorozat általánosan a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned} x_1 &= A, \quad y_1 = B, \\ x_n &= a_1 x_{n-1} + b_1 y_{n-1} + c_1, \\ y_n &= a_2 x_{n-1} + b_2 y_{n-1} + c_2, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol A, B, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 valós számok. (Sok esetben $c_1=0$ vagy $c_2=0$.)

Célunk az (1) által adott rekurzív sorozatok explicit formában való megadása. Ezek a sorozatok azért is figyelemre méltóak, mivel jól alkalmazhatók bizonyos diofantikus egyenletek vizsgálatában és összefüggésbe hozhatók az úgynevezett főtengely-transzformációval. Például az

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad y_1 = 1, \\ x_n &= 3x_{n-1} + 4y_{n-1} + 1, \\ y_n &= 2x_{n-1} + 3y_{n-1} + 1 \end{aligned} \tag{2}$$

rekurzív sorozat egy diofantikus egyenlet vizsgálata kapcsán adódott (A Matematika Tanítása 1978/2. 58. oldal). A következőkben ezen mutatjuk be az ismertetendő módszert. Tekintsük (1)-et! Legyen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_n = \mathbf{M}^2\mathbf{v}_{n-1} = \ldots = \mathbf{M}^n\mathbf{v}_1,$$

azaz

$$\mathbf{v}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} A \\ B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Könnyen megkaphatnánk $\mathbf{v}_{n+1}$-et — azaz x_{n+1}-et, y_{n+1}-et —, ha $\mathbf{M}^n$-et ismernénk.

A probléma tehát $\mathbf{M}^n$ megadása.

Ismert ([4] 181. oldal vagy [5] 234—246. oldal), hogy ha **M** sajátértékei mind különbözők, akkor az

$$\mathbf{M} = \mathbf{CDC}^{-1}$$

szorzat létezik, ahol **D** diagonális mátrix, amelynek főátlójában **M** sajátértékei szerepelnek (csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor **M** sajátértékei mind különbözők), és **C** oszlopvektorai **M** független sajátvektorai. (A **C** mátrix inverze $\mathbf{C}^{-1}$ és $\mathbf{CC}^{-1}=\mathbf{E}$ egységmátrix.)

Ezek szerint

$$\mathbf{M}^n = (\mathbf{CDC}^{-1})^n = \mathbf{CD}^n\mathbf{C}^{-1},$$

azaz, ha λ_1, λ_2, λ_3 az **M** sajátértékei, akkor

$$\mathbf{M}^n = \mathbf{C}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}.$$

A λ_1, λ_2, λ_3 sajátértékeket az

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

illetve

$$\lambda^3-\lambda^2(a_1+b_2+1)+\lambda(a_1b_2+a_1+b_2-a_2b_1)-a_1b_2+a_2b_1 = 0 \tag{3}$$

harmadfokú egyenlet gyökei szolgáltatják. Az **M** megfelelő sajátvektorai pedig az

$$\mathbf{Mx}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{Mx}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{Mx}_3 = \lambda_3\mathbf{x}_3$$

egyenletek megoldásából adódnak. Legyen az így adódott három sajátvektor

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix};$$

azaz

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

A $\mathbf{C}^{-1}$ ezek után könnyen meghatározható.

A (2) sorozat esetén

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és a (3)-nak megfelelő egyenlet:

$$0 = \lambda^3-7\lambda^2+7\lambda-1.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = 3+2\sqrt{2},$$

$$\lambda_3 = 3-2\sqrt{2}.$$

Az **M** három független sajátvektora a

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerekből adódik ($i=1, 2, 3$). Az $i=1$ esetben

$$3x_{11}+4x_{12}+x_{13} = x_{11},$$

$$2x_{11}+3x_{12}+x_{13} = x_{12},$$

$$x_{13} = x_{13}.$$

Ha $x_{13}=1$, akkor

$$2x_{11}+4x_{12}+1 = 0,$$

$$2x_{11}+2x_{12}+1 = 0,$$

ahonnan

$$x_{12} = 0,\ x_{11} = -\frac{1}{2}.$$

Az $i=2$ és $i=3$ esetekben

$$3x_{i1}+4x_{i2}+x_{i3} = (3\pm 2\sqrt{2})x_{i1},$$

$$2x_{i1}+3x_{i2}+x_{i3} = (3\pm 2\sqrt{2})x_{i2},$$

$$x_{i3} = (3\pm 2\sqrt{2})x_{i3}.$$

Ebből pedig $x_{i3}=0$, azaz $x_{23}=0$, $x_{33}=0$; és ezért

$$3x_{i1}+4x_{i2} = (3\pm 2\sqrt{2})x_{i1},$$

$$2x_{i1}+3x_{i2} = (3\pm 2\sqrt{2})x_{i2}.$$

A

$$\left.\begin{aligned} -2\sqrt{2}x_{21}+4x_{22} &= 0, \\ 2x_{21}-2\sqrt{2}x_{22} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2\sqrt{2}x_{31}+4x_{32} &= 0 \\ 2x_{31}+2\sqrt{2}x_{32} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszereket az $x_{22}=1$, $x_{21}=\sqrt{2}$, $x_{32}=1$, $x_{31}=-\sqrt{2}$ értékek kielégítik.

Így

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ezek után

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{D}^n\mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})^n & \frac{1}{\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{1}{\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n & \frac{1}{4}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{1}{4}(3-2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n & \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})^n & \frac{1}{4\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n - \frac{1}{4\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

azaz:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(3+2\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{4}(3-2\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2},$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^{n+1}.$$

IRODALOM

[1] LOVÁSZ L.: *Combinatorial Problems and Exercises*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.
[2] MÁTÉ L.: *Rekurzív sorozatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
[3] VILENKIN N. J.: *Kombinatorika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.
[4] RÓZSA P.: *Lineáris algebra és alkalmazásai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
[5] GÁSPÁR GY.: *Mátrixszámítás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10. II. 10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

981. Ketten felváltva húznak n darab golyóból tetszés szerinti (pozitív egész) számú golyót, de minden húzáskor legfeljebb a darabot. Az veszít, akire az utolsó $b(>0)$ darab golyó maradt. Mi a kezdő húzó nyerőstratégiájának a feltétele?

982. Határozzuk meg az

$$x^4+2x^3-4x^2-2x+3 = y^2$$

egyenlet egész megoldásait!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

983. Legyen P az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szög síkjának tetszőleges pontja. Jelölje Q_i a P talppontját az A_iA_{i+1} egyenesen ($A_{n+1}\equiv A_1$). Bizonyítsuk be, hogy az A_iQ_i előjeles távolságok összege a sokszög fél kerületével egyenlő! (Az A_iQ_i távolság pozitív, ha az A_i nem választja el a Q_i, A_{i+1} pontpárt. Ellenkező esetben a távolság negatív.)

984. Az n pontból álló pontrendszer, az egységsugarú G_1 gömb, továbbá a $\sqrt{2}$ sugarú G_2 gömb úgy helyezkedik el a térben, hogy a G_1 gömbfelület bármely pontjának az adott n darab ponttól mért távolságainak négyzetösszege 1919 és a G_2 gömbfelület bármely pontjára az előbbi összeg 2000. Határozzuk meg az n értékét!

Bartha Gábor, Szentendre

985. Tekintsük az alábbi, bűvös négyzetből alkotott A mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az A^k (k pozitív egész) mátrix elemeit!

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

986. $P(x)$ olyan m-edfokú, egész együtthatós polinom, amelynek van legalább egy racionális gyöke és rendelkezik a következő tulajdonsággal: Létezik $n(m>n)$ darab $\alpha_1<\alpha_2\ldots<\alpha_n$ egész szám, amelyre $|P(\alpha_k)|=1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{i<j} \ln(\alpha_j-\alpha_i) < \frac{n(n-1)}{2}!$$

Bencze Mihály, Brassó

Feladatmegoldások (957—962.)

957. Melyik az a nyolcjegyű négyzetszám, amelyben az első négy és az utolsó négy jegyből álló négyjegyű szám egymás utáni egészek?

1. megoldás: Legyen a nyolcjegyű négyzetszám $B=A^2$, ahol A olyan négyjegyű szám, amelynek négyzete nyolcjegyű, azaz

$$3162 < A < 10^4.$$

A feladat feltételeiből következően, ha a egy megfelelő négyjegyű szám, akkor

$$10\,000a+(a+1) = A^2 \qquad \text{(I.)}$$

vagy

$$10\,000(a+1)+a = A^2. \qquad \text{(II.)}$$

Először az (I.) esettel foglalkozva:

$$10\,001a = 73 \cdot 137 \cdot a = (A-1)(A+1). \qquad (*)$$

Mivel
$(A-1, A+1) \leqq 2$, továbbá 10 001 a $(*)$ jobb oldalán levő egyik tényezőnek sem lehet osztója, ezért 73 (és ugyanígy a 137 is) az $A-1$, $A+1$ tényezők pontosan egyikének osztója, azaz keresnünk kell a

$$137x+73y = 2$$

diofantikus egyenlet olyan megoldásait, melyekre A a megadott határok közé esik. Ezen egyenlet valamennyi megoldását az

$$x = 73t+16, \quad y = -137t-30$$

értékpárok szolgáltatják. Ezek közül a $t=-1$ szolgáltatta

$$A = 7810$$

felel meg, amelyre

$$B = A^2 = 7810^2 = 60\,996\,100.$$

A (II.) esetet vizsgálva, előbbihez hasonló átrendezéssel

$$10\,001a = (A-100)(A+100) \qquad (**)$$

kell teljesüljön. Ha 10 001 a jobb oldal egyik tényezőjének osztója, akkor ez csak az $(A+100)$-ra teljesülhet, s ekkor

$$A+100 = 10\,001,$$

azaz

$$A = 9901$$

kell legyen, mivel a többi esetben $A > 10^4$ lenne.
A

$$B = A^2 = 9901^2 = 98\,029\,801$$

valóban megoldása feladatunknak.
Ha viszont 10 001 nem osztója a $(**)$ egyik tényezőjének sem, akkor megoldását a

$$137x+73y = 200$$

diofantikus egyenlet megoldásai közül kell kiválasszuk. Ennek valamennyi gyökét az

$$x = -73t-6, \quad y = 137t+14$$

értékpárok adják. Ezek közül egyedül a $t=-1$ választásra kapott

$$A = 9079$$

érték a megfelelő, s erre

$$B = A^2 = 9079^2 = 82\,428\,241.$$

Ezek szerint feladatunknak három megoldása van.

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

II. megoldás: Az előbbi megoldásbeli (II.) esetet a Gauss-egészekkel is megoldhatjuk. Adjunk mindkét oldalhoz egyet, majd a 10 001-et Gauss-prímekre bontva:

$$(11+4i)(11-4i)(8+3i)(8-3i)(a+1) = (A-i)(A+i).$$

Negatív A-kat is megengedve, feltehető, hogy

$$11+4i \Big| A+i$$

Ekkor

$$11-4i \Big| A-i \quad \text{és} \quad 8+3i \Big| A+i \quad \text{vagy} \quad 8+3i \Big| A-i .$$

Az utóbbi esetben

$$8-3i \Big| A+i .$$

Így vagy

a) $A+i = (76+65i)(z-ui) = (76z+65u)+(65z-76u)i,$

vagy

b) $A+i = (100-i)(z+ui) = (100z+u)+(100u-z)i.$

Az *a)* esetben

$$65z-76u = 1, \quad z = 76w-7, \quad u = 65w-6, \quad A = 10\,001w-922,$$

a *b)* esetben pedig

$$100u-z = 1, \quad A = 100z+u = 10\,001u-100.$$

Mindkét esetben a w, illetve $u=1$ ad számunkra megoldást. Ezek az $A=9079$ és az $A=9901$.

Surányi János, Budapest

A megoldók száma: 6.

958. Bizonyítsuk be: ha egy kör középpontjának koordinátái közül legalább az egyik irracionális, akkor legfeljebb két racionális koordinátájú pont van a körön!

Megoldás: Az állítással ellentétben, tegyük fel, hogy van három racionális koordinátájú pont a körön. E három pont háromszöget határoz meg, melynek oldalfelező merőlegesei a kör középpontjában metszik egymást. A csúcsok koordinátái racionálisak lévén, az oldalfelező pontok és a felezőmerőlegesek normálvektorainak koordinátái is racionálisak. A kör középpontjának koordinátáit tehát egy racionális együtthatós, lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Az egyenletrendszernek van megoldása, hiszen bármely két oldalfelező merőleges metszi egymást, s a megoldás csak racionális lehet, mivel az együtthatókból a négy alapművelettel kapjuk.

Ez viszont ellentmond a középpont koordinátájára vonatkozó feltételnek, ezért feltevésünk ellenkezője igaz, vagyis legfeljebb két racionális koordinátájú pont van a körön.

Csősz Sándor, Dunakeszi

1. Megjegyzés: Könnyen adhatunk példákat olyan körökre, amelyekre feladatunk feltételei teljesülnek, s amelyeken rendre 2, 1, 0 racionális koordinátájú pont van. Ilyen az

$$\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+y^2 = u$$

egyenletű kör, ha u rendre $\frac{5}{2}+\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$. Az első esetben az $(1;\,1)$ és $(1;\,-1)$, a második esetben a $(0;\,0)$ pont az egyedüli racionális pont a körön.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Megjegyzés: A feladat általánosítható, ugyanis ha az n dimenziós gömb középpontjának koordinátái közül legalább az egyik irracionális, akkor legföljebb 2^{n-1} racionális koordinátájú pont van az n dimenziós gömbön. Ennek bizonyítása ugyanúgy megy, mint a kétdimenziós esetben, csak a gömb középpontját most 2^{n-1} darab $n-1$ dimenziós hipersík határozza meg. Ezek a gömb $2^{n-1}+1$ darab

racionális koordinátájú pontjai által meghatározott szakaszok $n-1$ dimenziós felezőmerőleges síkjai. E síkok egyenletei által alkotott egyenletrendszer lineáris és racionális együtthatós, így a megoldás, ami a gömb középpontjának koordinátáit adja, szintén racionális.

Ambrus Gabriella, Budapest és Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 10.

959. Legyen a, b, c egy háromszög három oldalának hossza; x, y, z pedig olyan valós számok, amelyeknek összege 0. Bizonyítsuk be, hogy:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy \leqq 0.$$

Megoldás: Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $xy \geqq 0$, mivel x, y, z között van két, előjelben nem különböző (megengedve a zérust is). Ekkor $a+b>c$ miatt

$$(a+b)^2xy \geqq c^2xy,$$

s így

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy \leqq a^2yz+b^2zx+(a+b)^2xy = a^2y(z+x)+b^2x\ (z+y)+2abxy.$$

Felhasználva, hogy $x+z=-y$ és $y+z=-x$,

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy \leqq -a^2y^2-b^2x^2+2abxy = -(ay-bx)^2 \leqq 0,$$

és ezt kellett igazoljuk.
Egyúttal azt is beláttuk, hogy az egyenlőség csakis akkor áll, ha $xy=0$ és $ay=bx$, amiből $x+y+z=0$ miatt, $x=y=z=0$.

Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest

Megjegyzés: A feladatbeli egyenlőséget elhagyva, az a, b, c pozitív számokra tett feltétel szükséges és elégséges. Ugyanis

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy = -(a^2y+b^2x)(x+y)+c^2xy =$$

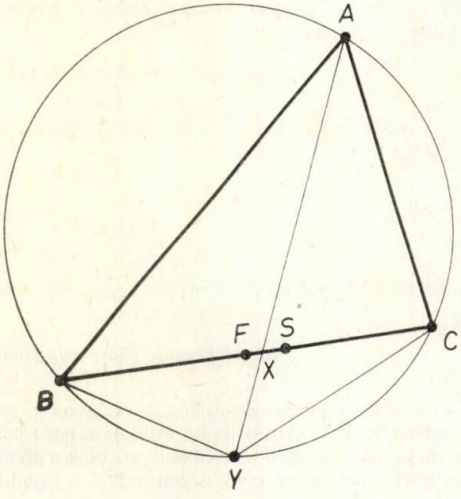
$$= -a^2y^2-b^2x^2-(a^2+b^2-c^2)xy = -(ay-bx)^2-(a+b+c)(a+b-c)xy < 0$$

a háromszög egyenlőtlenség miatt mindig igaz, másrészt, ha minden x, y-ra igaz, akkor $x=a$, $y=b$-re is, tehát $c<a+b$. Szimmetriaokokból, hasonlóan következik a másik két egyenlőtlenség is.

Surányi János, Budapest

A megoldók száma: 14.

960. Legyen az ABC háromszög BC oldalának egy pontja X. Az AX egyenes a körülírt kört másodjára az Y pontban metszi. Az X pont mely választására lesz maximális az XY távolság?



Megoldás: Először azt látjuk be, hogy ha F a BC szakasz felezőpontja, S pedig a BAC szög felezőjének az oldallal való közös pontja, akkor X az FS szakasz pontja. Az AXC és BXY, illetve az ABX és CYX háromszögek hasonlóságából:

$$XY \cdot AC = BY \cdot CX \quad \text{és} \quad XY \cdot AB = CY \cdot BX.$$

Ezek szorzatából

$$(XY)^2 \cdot AB \cdot AC = (BX \cdot CX) \cdot (BY \cdot CY).$$

Mivel a $BYC\sphericalangle$ állandó, és $BY \cdot CY \cdot \sin(BYC\sphericalangle)$ a BCY háromszög kétszeres területe, ezért a

$BY \cdot CY$ szorzat növekszik, ha X C pontból kiindulva tart S ponthoz, és csökken, ha az X S-től tart B-hez.

A $BX \cdot CX = BX(BC-BX)$ miatt a

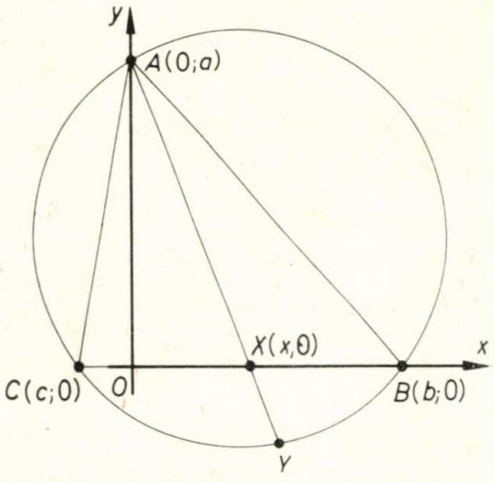
$BX \cdot CX$ szorzat növekszik, ha X pont C pontból kiindulva tart F ponthoz, és csökken, ha az X F-től tart B-hez.

Nyilván feltehető, hogy $AB \cong AC$, s ez esetben S az CF szakasz pontja.

Az előbbiek szerint tehát a $(BX \cdot CX) \cdot (BY \cdot CY)$ szorzat mindkét tényezője nő, ha X pont C pontból tart S ponthoz és csökken, ha X F-ből megy B-be, vagyis az $(XY)^2$ és így XY távolság is, maximumát az FS szakaszon kell fölvegye.

Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

A továbbiakban koordinátageometriai úton határozzuk meg a maximumot adó X pont helyét. Jelölje O az A csúcshoz tartozó magasság talppontját, s vegyük fel a koordinátarendszert az ábra szerint.



Az $AB \cong AC$ feltevés miatt $OB \cong OC$, tehát $b \cong |c|$, ahol c negatív, nulla vagy pozitív.

Az X pontnak a körülírt körre vonatkozó hatványából:

$$XY = \frac{XB \cdot XC}{XA} = \frac{(b-x)(x-c)}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Ez akkor és csak akkor maximális, ha négyzete maximális. Jelölje $f(x)$ tehát XY távolság négyzetét,

$$f(x) = \frac{(x-b)^2(x-c)^2}{x^2+a^2}.$$

A maximum meghatározásának érdekében kiszámítjuk $f(x)$ derivált függvényét:

$$f'(x) = \frac{2(x-b)(x-c)}{(x^2+a^2)^2}\,[x^3+(2a^2-bc)x-a^2(b+c)].$$

Ennek a (c, b) intervallumba eső zérushelyei azonosak az

$$F(x) = x^3+(2a^2-bc)x-a^2(b+c)$$

polinomfüggvénynek ugyanide eső zérushelyeivel.

1. Ha a

$$d = \frac{a^4(b+c)^2}{4}+\frac{(2a^2-bc)^3}{27} > 0,$$

akkor $F(x)$-nek egyetlen valós gyöke van, és ez éppen a (c, b) számközhöz tartozik, mert

$$F(c) = (c-b)(c^2+a^2) < 0$$

és

$$F(b) = (b-c)(b^2+a^2) > 0.$$

A Cardano-formula szerint ez a gyök:

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2(b+c)+\sqrt{d}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2(b+c)-\sqrt{d}} \qquad (1)$$

Az előzőekből következik, hogy ha $x \in (c, x_0)$, akkor $f'(x) > 0$, ha pedig $x \in (x_0, b)$, akkor $f'(x) < 0$, következésképp $f(x)$-nek az x_0-ra maximuma van.

2. $d = 0$ esetén $F(x)$ zérushelyei:

$$2\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2(b+c)} \quad \text{és} \quad -\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2(b+c)} \quad \text{(kétszeres gyök)}.$$

Ez esetben $c > 0$ kell legyen, s így a (c, b) intervallumba eső gyök

$$x_0 = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2(b+c)}, \qquad (2)$$

amelyre az előzőek mintájára állapíthatjuk meg, hogy $f(x)$-nek maximuma van.

3. A $d<0$ esetben $F(x)$-nek három valós gyöke van. Ezek trigonometrikus alakja:

$$x_k = 2\sqrt{\frac{bc-2a^2}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right) \quad (k=0,1,2),$$

ahol

$$\varphi = \arccos\frac{a^2(b+c)}{2\sqrt{\left(\frac{bc-2a^2}{3}\right)^3}} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Esetünkben $d<0$ miatt $c>0$ és $bc-2a^2>0$ kell legyen! A három valós zérushely közül csak az

$$x_0 = 2\sqrt{\frac{bc-2a^2}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3} \tag{3}$$

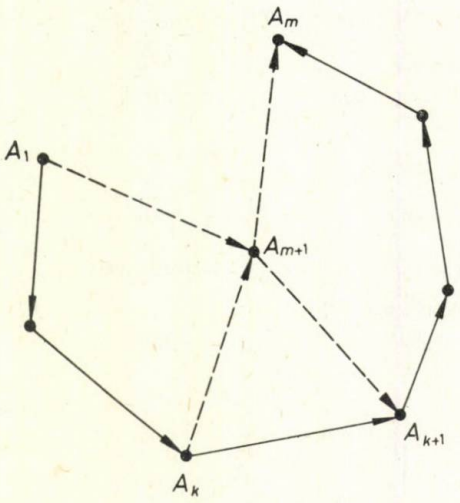
pozitív, és $F(c)<0$, $F(b)>0$ (c és b pozitív) miatt ez a gyök épp a (c, b) közbe esik. Ha $x\in(c, x_0)$, akkor $f'(x)>0$, ha viszont $x\in(x_0, b)$, akkor $f'(x)<0$, s így $f(x)$-nek az x_0 helyen maximuma van.

Összefoglalva: XY maximális, ha az $X(x, 0)$ pont helyzetét az (1), (2), illetve a (3) összefüggés adja. Hosszabb számolással adódik, hogy x_0 valamennyi esetben az FS szakasz pontja.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

A megoldók száma: 3.

961. m hegycsúcson n üzem úgy épített síliftállomást, hogy bármely két hegycsúcsot összeköt sílift, de csak egy irányban; továbbá nincs $k+1$ olyan, egyazon üzem által épített állomás, amelyeket az egyirányú liftekkel egymás után fel lehetne keresni. Legföljebb mekkora lehet m?



Megoldás: Gráfterminológiával élve, egy m szögpontú T_m teljes gráf valamennyi élét irányítottuk, és minden csúcsot n szín valamelyikével színeztük úgy, hogy nincs k hosszúságú irányított út, melynek szögpontjai azonos színűek.

Először belátjuk: *A T_m éleinek bármely irányítására van olyan $m-1$— egymáshoz csatlakozó módon irányított — él, amely valamennyi csúcsot tartalmazza.*

A bizonyítást m-re vonatkozó teljes indukcióval hajtjuk végre. $m=2$-re nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy rögzített $m(\geq 2)$-re igaz. Tekintsük most az $m+1$ szögpontú teljes gráf éleinek tetszőleges irányítását. Hagyjuk el a gráf egy csúcsát a rá illeszkedő irányított élekkel együtt. Így egy m szögpontú teljes (rész) gráfot kapunk, melynek — az indukciós feltevés miatt — van $m-1$ hosszúságú, valamennyi csúcsot tartalmazó, irányított útja. Legyen ennek kezdőpontja az A_1 és végpontja A_m.

Ha most az A_{m+1} csúcsra illeszkedő éleink $\overrightarrow{A_{m+1}A_1}$ vagy $\overrightarrow{A_mA_{m+1}}$ irányításúak voltak, akkor az $\overrightarrow{A_1A_2\ldots A_m}$ irányított úthoz ezek irányításhelyesen csatlakoznak. Különben az A_iA_{m+1} ($i=1, 2, \ldots, m$) élek mindegyike az A_{m+1} csúcsba „befutó" vagy onnan „kifutó" él. Legyen $k(1<k<m)$ az a maximális index, amelyre az A_kA_{m+1} él „befutó", azaz $\overrightarrow{A_kA_{m+1}}$ irányítású. Ekkor az $A_{k+1}A_{m+1}$ él kifutó, azaz $\overrightarrow{A_{m+1}A_{k+1}}$ irányítású. Így viszont az $\overrightarrow{A_1A_2\ldots A_kA_{m+1}A_{k+1}\ldots A_m}$ a keresett, valamennyi csúcsot tartalmazó irányított út.

Legyen S_i az i színű csúcsok halmaza ($1\leq i\leq n$). Segédtételünk miatt

$$|S_i| \leq k,$$

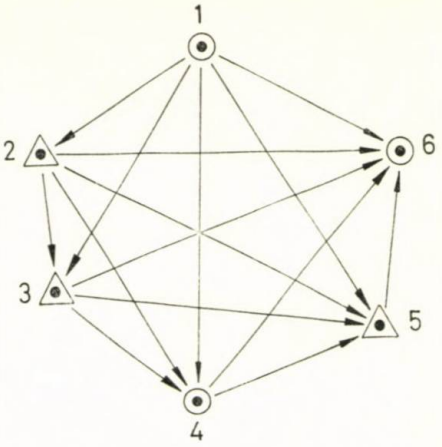
s így

$$m \leq nk.$$

Bogdán Zoltán, Cegléd

Megjegyzés: A nyert felsőkorlát éles, mert legyenek a T_m A_iA_j élei úgy irányítva, hogy A_i-ből A_j-be vezessen, ha $i<j$, és válasszuk meg az S_i halmazt úgy, hogy $|S_i|=k$ legyen. Ekkor nincs k hosszúságú, azonos színű csúcsokra illeszkedő irányított út. Az ábra a $k=3$ és $n=2$ esetre vonatkozik.

A megoldók száma: 1.



962. Legyenek A, B, C egy hegyesszögű háromszög szögei. Bizonyítsuk be, hogy

$$\ln\left(\frac{\sin A}{\sin C}\right)^2 \geqq \frac{(A-B)\sin C}{\sin A\cdot\sin B}+\frac{(B-C)\sin A}{\sin B\cdot\sin C}! \qquad (1)$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Az (1) nem igaz minden hegyesszögű háromszögre, mert ha $A=B=\frac{5\pi}{12}$, $C=\frac{\pi}{6}$, akkor

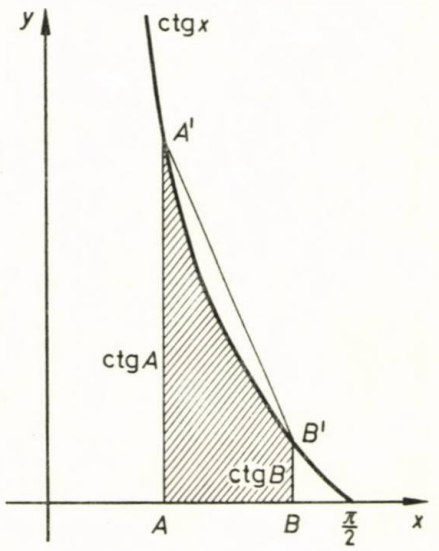
$$\ln\left(\frac{\sin A}{\sin C}\right)^2=\ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2\approx 1{,}318,$$

és

$$\frac{(A-B)\sin C}{\sin A\cdot\sin B}+\frac{(B-C)\sin A}{\sin B\cdot\sin C}=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57.$$

Bebizonyítjuk, hogy ha az eredeti feltételeken túl, $A\leqq B\leqq C$ is teljesül, akkor igaz az (1) összefüggés.

Tekintsük az $f\colon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $x\mapsto\operatorname{ctg}x$ függvényt. Ez a függvény konvex, hiszen $f''(x)=\frac{2}{\sin^3 x}>0$, ha $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Ebből következik, hogy ha $A\leqq B$, akkor az ábrán látható görbe vonalú $ABB'A'$ trapéz területe nem nagyobb az $ABB'A'$ trapéz területénél, tehát



$$\int_A^B \operatorname{ctg}x\,dx\leqq(B-A)\frac{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}{2},$$

vagyis

$$\ln\sin B-\ln\sin A\leqq(B-A)\frac{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}{2},$$

ahonnan

$$2(\ln\sin A-\ln\sin B)\geqq(A-B)(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B). \qquad (2)$$

Másrészt $A+B=\pi-C$ miatt

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\cdot\sin B}=\frac{\sin C}{\sin A\cdot\sin B},$$

s ennek alapján a (2)-ből következően:

$$2\,(\ln \sin A - \ln \sin B) \geqq \frac{(A-B)\sin C}{\sin A \cdot \sin B}. \tag{3}$$

Ugyanígy, ha $B \leqq C$

$$2\,(\ln \sin B - \ln \sin C) \geqq \frac{(B-C)\sin A}{\sin B \cdot \sin C}. \tag{4}$$

A (3) és (4) megfelelő oldalainak összegéből az (1) egyenlőtlenséget kapjuk. Azt is láttuk, hogy az egyenlőség csakis akkor áll, ha $A = B = C$, azaz a háromszög szabályos.

Ha $A \geqq B \geqq C$, akkor (1)-hez viszonyítva épp a fordított egyenlőtlenség áll fenn, a többi esetben (1) lehet igaz is és hamis is.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

A megoldók száma: 4.

A megoldók névsora (957—962.)

Ambrus Gabriella, Budapest (958, 959.); Benczc Mihály, Brassó (957—959., 962.); Bogdán Zoltán, Cegléd (957—959., 961., 962.); Csorba Ferenc, Győr (959.); Csősz Sándor, Dunakeszi (958., 959.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (957., 959.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (957., 958. és 959. 2-2 mód, 960., 962.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (958., 959.); Dr. Major Pál, Budapest (958., 959.); Máté Bálint, Pécs (959.); Náfrádi Ferenc, Győr (958.); Simon Béla, Nyíregyháza (959.); Surányi János, Budapest (957., 959.); Szánthó Gyula, Gyula (957—960., 962.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (958—960.).

INDEX: 25 565